Los números naturales.

Partiremos de los números naturales como conocidos, ya que los estudiaron en el curso anterior.

Llamamos N al conjunto de los números naturales. Consideramos que cero es un número natural.

Con los números naturales efectuamos operaciones.

A los efectos de este curso, diremos que una operación binaria es una “regla” que asigna, a cada par ordenado de elementos de un conjunto, un único elemento del mismo conjunto.

Con los naturales podemos definir la suma, la multiplicación. Ambas son operaciones binarias en N, en el sentido de lo que dijimos recién, es decir, siempre se consigue un resultado, para cada pareja es único, y pertenece al conjunto N. Estas operaciones tienen ciertas propiedades, que solo mencionaremos cuando las utilicemos.

<u>Nos detendremos en la multiplicación:</u>

Supongamos que queremos hallar un natural (o todos, si hubiera más de uno), tales que:

Dicho natural multiplicado por 1 nos dé 5 como resultado.

En símbolos sería algo así: Determinar $x \in N / x.1 = 5$

Como 1 es el neutro de la multiplicación de naturales, $x.1 = x$ cualquiera que sea x natural. Así que llegamos a que: $x = 5$.

Lo que hemos hecho es dividir: $5 \div 1$ y el resultado nos dio 5.

Llamaremos a 5 “dividendo” y a 1 “divisor”.

Podríamos ya dar una definición de división (exacta), aunque esta sea **provisoria**:

Si a y b son naturales, efectuar la división de a entre b consiste en encontrar el natural c que verifique: $c \,.\, b = a$.

Seguiremos con otros ejemplos:
Supongamos que queremos hallar los siguientes números naturales *x*:

1) $x \in N / x.1 = 0$
2) $x \in N / x.0 = 0$
3) $x \in N / x.0 = 1$
4) $x \in N / x.2 = 4$
5) $x \in N / x.2 = 5$

A partir de la resolución de los casos anteriores, podemos ver:

1) que la división entre 0 es imposible, lo que nos permitirá dar una definición más definitiva (excluyendo a 0 como divisor).
2) Que la división en N no siempre es posible, aparte del caso anterior.

Definición de división en N:

Dados *a* y *b* naturales, y $b \neq 0$ **, diremos que** $a \div b = c$ **si y sólo si:** $c.b = a$

Ahora, hemos encontrado el caso de 5 dividido entre 2, que no tiene resultado en N. Y como este caso, hay infinitos. Por ejemplo, los de dividir cualquier impar entre 2. Esto nos presenta un problema. Porque la división, por el hecho de conseguirse a través de ella, el número que multiplicado por otro dado, nos devuelve uno inicial también dado, es la operación que nos sirve para medir. Cuando nos preguntamos: ¿cuántos de estos (segmentos, cuadrados, tiras, cosas) debo usar para “cubrir” aquello? Por ejemplo, si tenemos una longitud, y elegimos un segmento como unidad, y la longitud que tenemos “es tres veces” la unidad, decimos que su medida es 3 unidades. El problema es que, para esta “operación” de medir, no alcanza con los números naturales. Volveremos sobre esto después, ahora seguiremos con la división.
La forma en que la matemática ha solucionado este problema de las divisiones que no tienen resultado (a excepción de las divisiones entre 0), es la siguiente:

Agrupamos (podríamos decir de modo muy informal, que “embolsamos” o “empaquetamos”) todas las divisiones que, según cierto criterio, “si dieran algún resultado”, este debería ser el mismo.
Esto es fácil de ver en divisiones que dan resultado en N.
Por ejemplo: $4 \div 2 = 8 \div 4 = 18 \div 9$ y así con infinitas divisiones.
Tendremos que decidir con qué criterio agrupamos las divisiones.
Hagamos algunos grupos, o “bolsas”:
$\{(2,4);(1,2);(3,6);(1000,2000),...\}$
$\{(3,5);(6,10);(60,100);...\}$
Aquí se han sustituido las divisiones por “pares”, el par: (3,5) significa: la división de 3 entre 5. Para saber si, por ejemplo: (2,8) y (3,5) están en la misma clase, se utiliza el criterio siguiente: 2 x 5 debería dar lo mismo que 8 x 3. En este caso no es así, entonces no están en la misma clase o grupo.
Es decir, para que: (*a*, *b*) y (*c*, *d*) estén en la misma clase, debe ocurrir:
a x *d* = *b* x *c*
Con esta definición, quedan totalmente clasificados los pares ordenados de naturales, en clases. A cada clase, diríamos informalmente, le pondremos una “etiqueta” o “nombre”. Por ejemplo, ¿qué etiqueta le pondremos a la clase de (2,4)? Podemos nombrarla: 2/4, 1/2.
Cada etiqueta se llama una fracción. En *a*/*b*, *a* es el numerador y *b* el denominador.
Es importante remarcar que toda pareja está en una y sólo una clase. Queda establecida una partición del conjunto NxN* en clases de equivalencia (seguiremos hablando informalmente de bolsas y etiquetas al principio). Cada bolsa será un nuevo número, llamado número racional. Para un número podemos usar la etiqueta (fracción) que queramos, siempre que esta sea un par de la bolsa.

Aquí ya tenemos un significado de fracción, en el sentido de división indicada de dos números.

Ahora con más formalidad:

Relación de equivalencia:

Definición:

Dado un conjunto *A*, y definida en *A* una relación binaria *R*, decimos que esta es de equivalencia, si verifica las siguientes propiedades:

1) Idéntica o refleja:
   $\forall x, x \in A, xRx$
2) Recíproca o simétrica
   $\forall x, x \in A, \forall y, y \in A, (xRy \Rightarrow yRx)$
3) Transitiva
   $\forall x, x \in A, \forall y, y \in A, \forall z, z \in A, (xRy, yRz \Rightarrow xRz)$

Tomemos ahora el conjunto de los números naturales, y definamos en *N X N** una relación *R* tal que: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c$.

Nota: en la definición de relación en *A* cada elemento de *A* se relaciona con un elemento de *A*. Aquí, la relación está definida en *A X A*, entonces cada par ordenado se relaciona con un par ordenado.

Por ejemplo, están relacionados: $(2,1)$ con $(8,4)$. No están relacionados: $(3,5)$ con $(1,6)$.

Mediante esta relación de equivalencia, el conjunto *N X N** queda "dividido" en clases, llamadas clases de equivalencia, tales que:

Cada par ordenado de naturales, pertenece a una y solo una clase. Si dos pares ordenados son equivalentes, es decir, están relacionados por *R*, entonces pertenecen a la misma clase. Y si no lo están, no pertenecen a la misma clase. La unión de todas las clases de equivalencia nos da el conjunto *N X N**. El nuevo conjunto cuyos elementos son cada una de las clases de equivalencia así formadas, se llama **conjunto cociente o partición de *N X N*.***

El conjunto cociente que hemos determinado, es parte del conjunto *Q*, de los números racionales, que se forma a partir de una relación que se define de igual forma, pero en *Z X Z**. A los efectos de este curso partimos de *N*, así que obtenemos un subconjunto de *Q*, el formado por los racionales positivos y el cero.

Cada clase de equivalencia, es decir, cada elemento del conjunto cociente, se llama un número racional.
Para representar uno de estos números, sin embargo, utilizamos cualquiera de sus representantes. Si fuéramos completamente rigurosos, desde ahora tendríamos que distinguir entre el par $(2,3)$ y el racional que es la clase a la que pertenece dicho par ordenado. Pero una vez comprendido el proceso de la definición, hacemos abuso del lenguaje y utilizamos el representante con el mismo símbolo que el conjunto. Y además, a los representantes en este caso, y a la clase misma de un par (a,b) lo notaremos: $\frac{a}{b}$, con la notación clásica de fracciones.

La suma y la multiplicación en este nuevo conjunto de números racionales, también se realizan a través de representantes (fracciones) cualesquiera de cada uno de ellos.
Veamos algunos ejemplos:
Si queremos sumar, por ejemplo, el racional $\frac{1}{4}$ con el racional $\frac{5}{4}$, tenemos que: el racional $\frac{1}{4}$ verifica que multiplicado por 4 nos da como resultado 1 (puesto que lo definimos como el resultado de dividir 1 entre 4). De forma similar, el racional $\frac{5}{4}$, multiplicado por 4 da como resultado 5. Entonces, si pensamos que se siguen cumpliendo las reglas que para la suma y multiplicación verificaban los naturales, entonces el racional que resulte de sumar $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{4}$, llamémosle *s*, tiene que verificar que: multiplicado por 4 dé como resultado la suma de 1 y 5, es decir, 6.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}\times 4=1\\ \frac{5}{4}\times 4=5\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{5}{4}=s \quad / s\times 4=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\times 4=\frac{1}{4}\times 4+\frac{5}{4}\times 4=1+5=6$$

O sea que: $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}$

Si tuviéramos dos racionales representados con fracciones de denominadores distintos, siempre podemos buscar uno "de la bolsa" de cada uno de ellos (es decir, una fracción equivalente), y sumarlos como recién.

Por ejemplo, supongamos que tenemos $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$. ¿Cuáles equivalentes a cada uno usaríamos? Intenta hacerlo.

¿Y si son $\frac{7}{8}$ y $\frac{7}{6}$?

Luego de lo que hemos visto, podemos, en general, hacer el siguiente razonamiento:

Si tenemos que sumar los racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, buscamos fracciones equivalentes a cada una de las dadas, con igual denominador. Como no conocemos los números b y d, y no sabemos si uno de ellos es múltiplo del otro o tienen algún divisor común, buscaremos fracciones equivalentes a cada una de las dadas, con un denominador que sea "infalible" para que sea el mismo, y podamos obtener fracciones equivalentes a las dadas: bxd.

$\frac{a}{b} = \frac{a.d}{b.d}$ $\qquad$ $\frac{c}{d} = \frac{c.b}{d.b}$ $\quad$ y $\quad$ $\frac{a.d}{b.d} + \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d + c.b}{b.d}$

Así que, para sumar podemos usar la regla:

Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

O bien, repetir el procedimiento de los ejemplos, sin usar ninguna regla de memoria.

Para la multiplicación podemos razonar de manera similar.

Veamos un ejemplo:

Si queremos multiplicar, por ejemplo: $\frac{2}{3}$ por 5, llamemos p al resultado.

Sabemos que $\frac{2}{3}$ es el número que multiplicado por 3 da como resultado 2. Así que:

Si $\frac{2}{3}\times 3 = 2$ entonces: $\left(\frac{2}{3}\times 3\right)\times 5 = 2\times 5 = 10$. Es decir: $\left(\frac{2}{3}\times 5\right)\times 3 = 10$, o lo que es lo mismo: $p\times 3 = 10$. De aquí se deduce que: $p = \frac{10}{3}$.

Lo anterior funciona en todos los casos, y nos lleva a que: $\frac{a}{b}\times c = \frac{a.c}{b}$ si c es un natural.

Si tenemos que multiplicar dos racionales y ninguno es natural, por ejemplo: $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$, llamemos p al resultado, y pensemos así:

$\frac{2}{3}\times 3 = 2$ y $\frac{7}{5}\times 5 = 7$

De lo anterior: $\left(\frac{2}{3}\times 3\right)\times\left(\frac{7}{5}\times 5\right) = \left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}\right)\times(3\times 5) = p\times 15$ y por otro lado,

$\left(\frac{2}{3}\times 3\right)\times\left(\frac{7}{5}\times 5\right) = 2\times 7 = 14$

Así que: $p\times 15 = 14$ de donce $p = \frac{14}{15}$. De aquí se puede generalizar la regla:

Multiplicación: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

En este conjunto nuevo de números racionales, hay algunos que “se parecen” a los naturales: $\frac{2}{1}$ con 2, $\frac{3}{1}$ con 3, etc. Este parecido se mantiene en los resultados de las operaciones de suma y multiplicación, así que “trataremos” en la práctica a estos “parecidos” como si fueran lo mismo, y muchas veces abusaremos nuevamente del lenguaje y diremos 2 en lugar de $\frac{2}{1}$.

En este nuevo conjunto podemos volver a la división, para ver que el problema que teníamos con los naturales, ahora ya no lo tenemos.

Si queremos dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, siempre que sea *c* distinto de 0 (en cuyo caso no hay resultado y esto no tiene arreglo), podemos razonar a partir de la definición de división.

Por ejemplo, si quiero dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{7}{5}$, tengo que encontrar un racional que multiplicado por $\frac{7}{5}$, me dé como resultado $\frac{3}{4}$. Lo podemos plantear del siguiente modo, poniendo un rectángulo en lugar del resultado que no conocemos aún:

$\boxed{\frac{\ }{\ }}\times\frac{7}{5}=\frac{3}{4}$. Si bien no parece tarea fácil, tal vez se ve mejor si ponemos:

$\boxed{\frac{\ }{\ }}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times 35}{4\times 35}=\frac{105}{140}$.

Ahora es más fácil ver que, eligiendo: $\frac{15}{28}$, tenemos la fracción buscada.

Observa las fracciones que nos dieron al inicio, para dividir, y encuentra la regla para obtener el cociente.

División de racionales:

Dados los racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con c distinto de cero, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\boxed{\frac{\ }{\ }}$

Volvamos a la medida. Supongamos que queremos medir, por ejemplo, un segmento AB usando una unidad. Si la unidad cabe en el segmento más de dos veces y menos de tres, podemos pensar en dividir la unidad a la mitad, y tomamos “mitades de la unidad”, supongamos que esta mitad “cabe” 5 veces en el segmento AB. Entonces diremos que la medida de AB es “5 unidades nuevas” o “cinco mitades de unidad” o 5/2 unidad. Si bien esto no resuelve todos nuestros problemas, como veremos después, es un gran paso adelante. ¿Cómo hacemos cuando usamos una regla para medir segmento? ¿Es algo parecido?

Desigualdad en *Q*:

Definición:

$a\in N, b\in N^*, c\in N, d\in N^*, \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a.d<b.c$

Expresiones decimales de un racional:

Los números naturales se representan usualmente, en el sistema decimal, utilizando potencias de base 10.

Por ejemplo: 234 significa: $2\times10^{2}+3\times10^{1}+4\times10^{0}$

Los racionales pueden representarse de manera similar.

Aquí es donde entran en escena las fracciones decimales.

Llamaremos fracciones decimales a aquellas cuyo denominador es una potencia de base 10.

Por ejemplo: $\frac{3}{10};\frac{17}{10};\frac{17}{100};\frac{128}{1000};\frac{4}{100}$.

Tomemos, por ejemplo, la primera: $\frac{3}{10}=3\times10^{-1}$, lo que nos sugiere la expresión: 0,3 para dicha fracción.

Todas las expresiones decimales con un número finito de cifras (que llamaremos expresiones decimales exactas), representan racionales. Pero no todos los racionales tienen una expresión de este tipo.

Consideremos por ejemplo: $\frac{1}{3}$

Si tuviera una expresión decimal de este tipo, se podría escribir de la forma: $\frac{a}{10^{n}}$.

Si fuera: $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^{n}}$ sería: $3a=10^{n}$, lo cual es imposible, porque ninguna potencia de base 10 es múltiplo de 3.

Sin embargo, podemos obtener una expresión decimal para racionales como $\frac{1}{3}$.

Efectuamos la división, agregando ceros para obtener las cifras decimales. La expresión decimal así obtenida es 0,3333333........ donde hay un número infinito de cifras iguales a 3. Una expresión como esta, donde un número o bloque de números se repite indefinidamente, se llama una expresión decimal periódica.

Si pensamos en general, en la expresión decimal de una fracción $\frac{a}{b}$, estamos pensando en la división de a entre *b*. El resto de cada una de las divisiones que

efectuamos, deberá ser menor que *b*, con lo cual tenemos un número máximo de restos distintos posibles. Si estamos dividiendo entre 7, por ejemplo, a lo sumo podemos tener 7 restos distintos (incluyendo al cero). Si obtenemos cero en algún paso, la expresión es exacta. Si no, luego de 6 pasos, necesariamente, se repetirá algún resto. Esto hará que se repita el cociente que se obtuvo antes, luego de ese resto, y después se repetirán todos los demás. Es decir, la expresión será necesariamente periódica.
Podemos decir, entonces:

Todo número racional solo admite una expresión decimal exacta o periódica.

Consideremos ahora lo recíproco:
Dada una expresión decimal, ¿representará siempre un racional?
Si es exacta, ya vimos que es la representación de una fracción decimal.

Por ejemplo: $0,325 = \frac{325}{1000}$

Esto se cumple porque, si llamamos: $a = 0,325$, tenemos que:

$1000a = 325$, de donde: $a = \frac{325}{1000}$

Si es periódica, veamos algunos ejemplos:

Si tenemos $m = 4,\overline{2}$, la estrategia anterior no nos sirve, puesto que siempre obtenemos una expresión periódica. Pero al usarla, cambiamos el número dado por un múltiplo del mismo. Y ambos (el múltiplo y el número dado) tienen igual período. Esto sugiere que, si los restamos, obtendremos un natural.
Así, podemos escribir:

$$10m = 42,\overline{2}$$
$$m = 4,\overline{2}$$

$$9m = 38$$

de donde obtenemos finalmente: $m = \frac{38}{9}$.

Veamos otro caso:

Sea $a = 2,2\overline{3}$ donde el período es la cifra 3.

Esta expresión se puede escribir como: 2,2 + $0,0\overline{3}$

Por un lado: $2,2=\frac{22}{10}$

$$b=0,0\overline{3}$$

Por otro: $$10b=0,\overline{3}$$

$$100b=3,\overline{3}$$

Si restamos 100*b* – 10*b* , tenemos:

$$100b-10b=3$$
$$90b=3$$

De donde: $b=\frac{3}{90}$

Luego: $a=\frac{22}{10}+\frac{3}{90}$

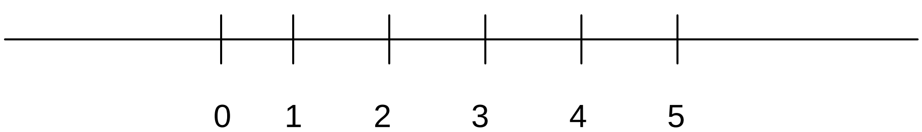
Con cualquier expresión decimal periódica se puede proceder de la misma forma. Así que diremos que:

Toda expresión decimal exacta o periódica representa un racional.

Representación en la recta:

De los naturales: Dada una recta *r*, elegimos un punto cualquiera de ella, y le asignamos el número 0 (supongamos que el punto es A). A la derecha de A, a cualquier distancia de él, colocamos un punto B al que le asignamos el 1. Y así seguimos colocando puntos a la derecha de B, siempre a la misma distancia, y tendremos una asignación para: 2, 3, 4, ...

El aspecto será el siguiente:



De los racionales:

¿Cómo representaremos los racionales que hemos definido recién? Veamos algunos ejemplos.

En primer lugar, deberá cumplirse que cada racional tenga una representación única (una vez elegidos un punto para el cero, y una escala). Así que todas las fracciones equivalentes tendrán como representación el mismo punto de la recta.

Si queremos representar una fracción, por ejemplo $\frac{3}{4}$, de acuerdo a lo que hemos visto, ella es el resultado de la división de 3 entre 4. Es decir, el número que multiplicado por 4 nos da como resultado 3. Esto podemos lograrlo dividiendo la distancia desde el punto donde marcamos el cero, hasta el punto donde marcamos el 3, en cuatro partes iguales. El extremo de la primera de dichas partes, que no es el punto que representa al cero, será el que representa $\frac{3}{4}$.

Ahora, ¿cómo lo hacen ustedes habitualmente? Esto lo discutiremos en clase. De la discusión, veremos qué "idea" de fracción está en juego en la forma de representarlas que cada uno de ustedes tiene, y qué "idea" cuando representamos la fración a partir de su expresión decimal. Y veremos qué tipo de representación tienen las distintas fracciones, si son mayores o menores que uno.

La densidad de los racionales:

Los números racionales tienen una propiedad muy interesante, que no tenían los naturales, y es que entre dos cualesquiera, encontramos siempre otro del mismo conjunto.

Un ejemplo es el promedio de los dos números:

Si $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

Demostrando lo anterior queda probado que entre dos racionales hay infinitos racionales. Decimos que el conjunto de racionales es **denso en sí mismo**.

Números irracionales: (breve mención).

De la propiedad de los racionales de ser un conjunto denso en sí mismo, podríamos pensar que con ellos “se completa la recta” (en nuestro caso, la semirrecta a la derecha del punto elegido para representar al cero).

Pero, si volvemos sobre lo dicho antes (que todo racional solo puede admitir una expresión decimal exacta o periódica y recíprocamente, que toda expresión decimal exacta o periódica representa un racional); y ahora escribimos:

0,12233344445555566666677777778888888899999999910101010101010101010...

la expresión decimal anterior no es exacta ni periódica, así que no puede representar un racional. A partir de esto, admitiremos la existencia de otros números, a los que llamaremos irracionales. Estos números también tienen una representación en la recta.

El ejemplo más conocido de número irracional, que aparece en la escuela, es el número π, aunque a ese nivel se confunde con un racional.

Es que para todo niño en la escuela, π = 3,14 o 3,1416, expresiones decimales ambas que, por ser exactas, representan racionales (¿Qué racionales serían?).

Piensa: ¿Cómo se define π? ¿Puede usarse la definición para buscar valores aproximados de este número? Lo veremos en clase.