CAPÍTULO

2 Lenguaje Algebraico y Ecuaciones

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así el ***gran paso de la aritmética al álgebra****. La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados*
Las ***ecuaciones*** *y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones representan al mismo número. Por* ***ejemplo****, la fórmula del área de un círculo es: $A = \pi r^2$. El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión: πr^2, pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio: r.*
A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella. En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación.
Los problemas de aplicación no vienen en forma " resuelva la ecuación", sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Cualquier solución matemática debe ser verificada si es solución del problema en cuestión, porque podría tener solución matemática que carezca de sentido con el contexto del problema. Los problemas que se te proporcionará serán de mayor o menor realismo con objeto de presentarte ejercicios para calcular el o los valores de ***x*** *a lo largo de toda la unidad.*

En este capítulo:

- *Recordaremos los conceptos necesarios para operar correctamente con igualdades.*
- *Desarrollaremos habilidad para resolver problemas aplicando ecuaciones de primero y segundo grado en una y dos incógnitas y sistemas de ecuaciones de primer grado en dos incógnitas.*
- *Repasaremos cuestiones de* ***álgebra elemental****, casi todo lo que diremos podría considerarse de repaso de cursos anteriores.*
- *Integraremos todos los conceptos dados hasta ahora.*

2.1 El álgebra y el lenguaje simbólico

¿Qué es el álgebra?. Es el manejo de relaciones numéricas en los que una o más cantidades son desconocidas, **incógnitas,** a las que se las representa por letras, por lo cual el **lenguaje simbólico** da lugar al **lenguaje algebraico.** Las operaciones para números: suma, resta, producto, división, son conocidas como **operaciones algebraicas** y cualquier combinación de números y letras se conoce como **expresión algebraica.** Por lo tanto, al traducir un cierto problema al lenguaje algebraico, se obtienen expresiones algebraicas, que son una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se las denomina, en general, **variables o incógnitas** y las simbolizamos con las últimas letras del alfabeto, en cambio las primeras letras se emplean para simbolizar números arbitrarios pero fijos, que llamamos **constantes.**

Frecuentemente aparecen igualdades que son de distinto tipo: identidades, ecuaciones y fórmulas.
Las **operaciones básicas con expresiones algebraicas,** se utilizan en el importante proceso de resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y otras importantes aplicaciones de ellas.

Ejemplos:
Escribir en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

a) La base es el doble que la altura.
Si llamamos $b = base$ y $h = altura$, la expresión algebraica es: $b = 2h$, pero también se podría haber llamado $x = base$ e $y = altura$ entonces se obtendría: $x = 2y$.

b) Dos números pares consecutivos.
$2n$ representa un número par, el siguiente número par es $2n + 2$, donde n es cualquier número entero.

EJERCICIOS

1.- Escribir en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados.

a) El cuadrado de la suma de dos números reales es igual a la suma de sus cuadrados más el doble de su producto.
b) El espacio recorrido por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.
c) Un número elevado a la 10 significa multiplicar 10 veces ese número.
d) El producto de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.
e) La suma de tres números enteros es 54.
f) Escribir un número natural, su anterior y su posterior.
g) La superficie de un cuadrado de lado *x* es 121.
h) El cociente de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes de las potencias que se dividen

---

2.2 Identidades

La igualdad, es el símbolo que más veces se utiliza en Matemática. Gran parte de los desarrollos matemáticos consisten en la transformación de una expresión en otra igual a ella.

La **igualdad verifica** las siguientes propiedades:

- Para todo ***a,*** se verifica ***a = a***
- Para cualquier par de números ***a*** y ***b,*** si ***a = b*** entonces ***b = a.***
- Para cualquier terna de números ***a, b*** y ***c,*** si ***a = b*** y ***b = c*** entonces ***a = c.***
- Si a los dos miembros de una igualdad se le suma (o resta) el mismo número, se obtiene otra igualdad.
- Si a los dos miembros de una igualdad se la multiplica (o divide) por el mismo número distinto de cero, se obtiene otra igualdad.

Estas dos últimas propiedades se utilizan continuamente para hallar la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones.
Una **identidad** es una **igualdad algebraica** válida para cualquier número real que se le asigne a las letras que intervengan.

Ejemplos:

1. La expresión $\frac{1}{2}(2x+4)-x=x$ es una **igualdad algebraica,** que **no** es una **identidad**, sólo es cierta para x = 2.
2. La expresión $2(x-5)+1=2x-9$, recibe el nombre de **identidad**, por que es verdadera para todos los números reales.
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, es una **identidad** que se ha visto en la unidad anterior.

¿Cuál es la ventaja de las identidades?
Que se puede transformar una expresión algebraica en otra equivalente mediante operaciones elementales.

EJERCICIOS

1. Escribir cinco identidades que se han visto en la unidad anterior.
2. Averiguar si las siguientes igualdades son identidades:

a) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ **b)** $a+a+a=3a$ **c)** $a+a+a=15$ **;**

d) $x\cdot x\cdot x=x^3$ **e)** $x\cdot x^3=x^4$ **f)** $x\cdot x^2=729$;

3. Partiendo de cada una de las expresiones de la izquierda, usar identidades para obtener la expresión de la derecha:

a) $(x+3)(x+3)-(x^2+x+6) \longrightarrow 5x+3$

b) $(x^2-1)-(x-1)^2 \longrightarrow 2(x-1)$

c) $(x+2)\,(x+6)-(x+2)(x+5) \longrightarrow x+2$

2.3 Ecuaciones y resolución de problemas

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman **incógnitas.**
Resolver una ecuación consiste en transformar la igualdad en otra equivalente más sencilla, hasta obtener la solución, que es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial.
Una expresión como $x+(x+1)+(x+2)=33$ es una ecuación, sólo es cierta para $x=10$. La solución es $x=10$.
Hay ecuaciones con muchas soluciones, e incluso infinitas soluciones, por ejemplo, $x+y=1$, $sen\,x=0$ y otras que no tienen solución como: $x + 3 = x$. Por lo tanto, resolver una ecuación es obtener las soluciones, si existen, que la satisfacen.
Para resolver una ecuación se utiliza las propiedades de la relación de igualdad y las propiedes de los números.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar el resultado.

a) $-2x-3=5$ **b)** $5(x+3)=2x+3$

Solución:
a)

$-2x-3+3=5+3$ (sumamos a ambos miembros 3)

$-2x=8$ (realizamos las operaciones posibles)

$(-2x)\div(-2)=8\div(-2)$ (dividimos ambos miembros por -2)

$x=-4$ (realizo las operaciones).

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución.
Si reemplazamos en la ecuación original: $-2(-4) - 3 = 8 - 3 = 5$, vemos que la verifica.

b)

$5x + 15 = 2x + 3$	(en el primer miembro hemos aplicado la propiedad distributiva)
$5x + 15 - 15 = 2x + 3 - 15$	(restamos a ambos miembros 15 o sumamos el opuesto de 15)
$5x = 2x - 12$	(realizo las operaciones)
$5x - 2x = -12$	(sumamos el opuesto de $2x$ o restamos $2x$)
$3x = -12$	(realizo las operaciones)
$(3x) \div 3 = (-12) \div 3$	(dividimos ambos miembros por 3)
$x = -4$	(realizo las operaciones)

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución de la ecuación dada, pues si reemplazamos en ella se verifica la igualdad: $5(-4+3) = 2(-4) + 3 \quad \rightarrow \quad 5(-1) = -8 + 3 \quad \rightarrow \quad -5 = -5$.

Nota: Para asegurar que el valor encontrado es la solución buscada, es conveniente verificar en la ecuación original. A la solución también se le llama **raíz de la ecuación.**

2. 3 .1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{a\,x + b = 0 \text{ con } a \neq 0,\ a, b \in R} \quad \textbf{(1)}$$

Se llama de **primer grado** porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia uno.

Ejemplos:

1.- Consideremos la ecuación $x - 2 = 5x - 3$, no es de la forma **(1)**, pero operando algebraicamente obtenemos $4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1}{4}$ que es la **solución** de la ecuación.
Queda para el lector verificar que efectivamente es la solución de la ecuación dada.

2.- Sea $x = x - 3$, operamos y obtenemos $0x = -3$, no existe ningún número real x que satisfaga la igualdad. Por lo tanto, esta ecuación **no tiene solución.**

3.- Expresiones como: $x = x$ ó $3x - 2 = 2(x-1) + x$, **tienen infinitas soluciones**, son ciertas para cualquier número real, son identidades.

EJERCICIOS

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 1 = 2 - 4x$

b) $22\,x - 7x - \dfrac{15}{2} = 10 - \left(\dfrac{7}{2}x - 1\right)$

c) $\dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{x-3}{2}$

d) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{15\,x + 11}{6}$

e) $6x - 24 = 5(x-4) + x - 4$

f) $25x - 18 = 20 - 5(x+3) + 30x$

g) $[2(x-3)-2]2-4(x-3)=2x-2$

h) $2(x-3)+4(x+5)=6$

i) $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$

j) $(x-3)x=x^2$

2.- Indicar cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado y luego encontrar su solución.

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{15x+11}{6}$

b) $\frac{2}{x+1}=2x+5$

c) $5+x=\frac{2}{x+3}$

d) $(x^2-1)(x+1)=0$

3.- a) La suma de tres números enteros consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?

b) Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma es igual a 117.

4.- De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcular la capacidad del depósito en centímetros cúbicos.

---

2 . 3 . 2 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \text{ , } a,b,c\in R \text{ y } a\neq 0} \qquad \textbf{(2)}$$

Observamos que la incógnita aparece elevada a la segunda potencia, decimos que la ecuación es **de grado dos** y la llamamos **ecuación cuadrática**.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

Ejemplos:

1.- La expresión $2x+3=5(x-3)$ es una ecuación de grado 1, con una incógnita y se llama de **primer grado.**

2.- La expresión $4-x=3x^2+5$ es una ecuación con una incógnita, de grado 2, o de segundo grado.

3.- La expresión $(x+2)(x+3)=0$ es una ecuación de segundo grado porque operando obtenemos: $x^2+5x+6=0$.

4.- La expresión $t(t+1)^2=3(t-7)$ es una ecuación de grado 3, pues operando queda $t^3+2t^2-2t+21=0$.

Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos raíces. Veamos algunas resoluciones sencillas mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

1.- a) $4x^2=400$, mediante operaciones algebraicas obtenemos: $x^2=10^2$ y aquí recordamos la propiedad de los números $\sqrt{x^2}=|x|$, con lo cual obtenemos: $x_1=10$ y $x_2=-10$, que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.

b) $21x^2 = 400$, completamos mediante operaciones algebraicas para obtener las raíces: $x_1 = \sqrt{400/21}$ y $x_2 = -\sqrt{400/21}$ y racionalizando resulta: $x_1 = \dfrac{20\sqrt{21}}{21}$ y $x_2 = \dfrac{-20\sqrt{21}}{21}$

2.- $t(t-10)=0$, observamos que el primer miembro es un producto de dos factores: t y t - 10. Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores es cero. En nuestro caso: $t(t$ - 10) = 0, implica t = 0 ó t - 10 = 0, de donde se obtiene, t = 0 ó t = 10 . Por lo tanto, las raíces buscadas son: $t_1 = 0$ y $t_2 = 10$.

3.- $x^2 + 10x + 8 = 0$, en este caso no es sencillo despejar la incógnita para encontrar las raíces, debemos aplicar la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Considerando la ecuación general de segundo grado, **(2)**, las soluciones se encuentran usando la fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \textbf{(3)}$$

Identificamos los coeficientes *a, b y c,* de la siguiente manera: *a* el coeficiente del término cuadrático, *b* coeficiente del término lineal y *c* el término independiente. En este ejemplo, *a* = 1, *b* = 10 y *c* = 8.

La deducción de la fórmula es la siguiente:

$$\begin{array}{lcll}
ax^2 + bx + c & = & 0\,, & \text{sumamos a ambos miembros } -c, \\
ax^2 + bx & = & -c & \text{multiplicamos a ambos miembros por } 4a, \\
4a^2x^2 + 4abx & = & -4ac & \text{sumamos a ambos miembros } b^2, \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 & = & b^2 - 4ac & \text{el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto,} \\
(2ax+b)^2 & = & b^2 - 4ac & \text{aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros,} \\
\sqrt{(2ax+b)^2} & = & \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{por definición de valor absoluto,} \\
|2ax+b| & = & \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{entonces,} \\
2ax + b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} &
\end{array}$$

En consecuencia, despejando *x*, tenemos la fórmula (3) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El doble signo en la fórmula antes de la raíz cuadrada, nos proporciona las dos soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Ejemplos: Encontrar las dos raíces de las ecuaciones de segundo grado:

1.- $x^2 + x - 6 = 0$, aplicando la fórmula **(3)**, tenemos $a = 1$, $b = 1$ y $c = -6$ y reemplazando en **(3)** obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -3$.

2.- $9x^2 + 6x + 1 = 0$, análogamente observando la ecuación tenemos: *a* = 2, *b* = 6 y *c* = 1, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$

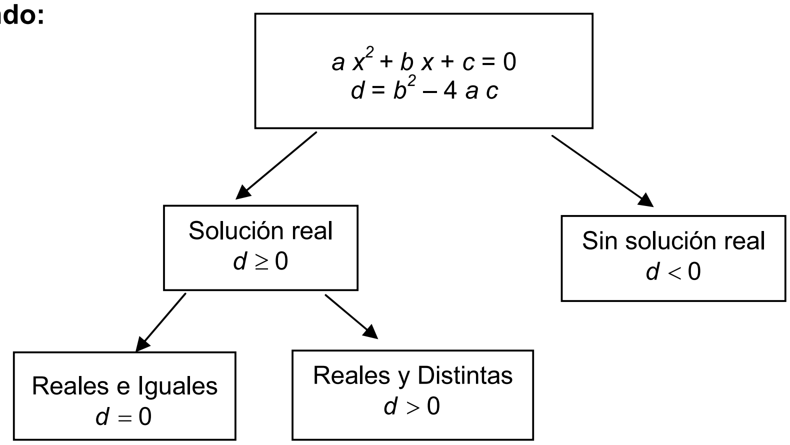
3.- $x^2 - 2x + 5 = 0$, finalmente aquí tenemos: $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

como recordamos la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real.
Analicemos cada una de las soluciones de los tres ejemplos anteriores. En el primero observamos que tiene dos raíces reales distintas, en el segundo, las raíces son reales e iguales y el último no tiene solución real.

Analicemos el radicando de la fórmula **(3)**, llamado **discriminante.** Sea $d = b^2 - 4ac$, si d < 0 no tiene solución real; si $d > 0$ tiene raíces reales distintas, y si $d = 0$, las raíces reales coinciden.

Resumiendo:



EJERCICIOS

1: Dadas las ecuaciones:

a) $9 = 5y - 3$; **b)** $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$; **c)** $6y + 5 = 2y + 7$ **;** **d)** $3x^2 - 6 = (x+2)(x-3)$ y las soluciones: -0.5; -3; 2.4 ; $1/2$; 0, $-1/2$, averiguar a cuál ecuación corresponde cada solución y determinar el grado que tiene cada ecuación.

2.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado pero previamente identificar si son o no completas:

a) $2t^2 + 4t - 6 = 0$ **b)** $(t+7)\,(t-1) + (t+1)^2 = 0$ **c)** $x^2 - x - 2 = 0$

d) $(v+7)(v-3) = 0$ **e)** $t^2 + 4t = 0$ **f)** $t^2 - 1 = 0$

3.- Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **b)** $2t^2 - 4t + 1 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 6 = 0$

4.- Utilizando el discriminante decir qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ **b)** $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 2x + 14 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

5.- a) Efectuar el producto (x - 4) (x – 3) .

b) Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

c) ¿Existe alguna relación entre los coeficientes –7 y 12 con las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$?

6.- Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ *con* $b, c \in R$ cuyas raíces son x_1 y x_2, demostrar:

$x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$.

7.- El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4.¿Cuál es el número?

8.- ¿Cuál es el número cuyo triple supera en dos a su cuadrado?

---

2 . 3 . 3 Ecuaciones con dos incógnitas

Ya hemos visto ecuaciones del tipo $ax + b = 0$ (de primer grado con una incógnita) y ahora veremos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, del tipo $a\ x + b\ y + c = 0$ con $a, b, c \in R$. Tiene como solución un par de valores (x,y) que la satisfacen. A este tipo de ecuaciones también se las suele llamar **ecuaciones lineales**. La linealidad viene dada por que ambas incógnitas están elevadas a la potencia uno y no se multiplican entre sí.

Ejemplos:

1.- $x - 2y = 0$ es una ecuación lineal en dos variables: x e y, tiene infinitas soluciones, como por ejemplo: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5/2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ etc.

o también se pueden escribir como par ordenado: $(4,\ 2)$; $(5,\ 5/2)$; $(-2,\ -1)$; $(-4,\ -2)$

2.- Al determinar las fuerzas F_1 *y* F_2 que actúan sobre una viga, podemos encontrar una ecuación tal como $2F_1 + 4F_2 = 200$ que tiene como soluciones:

$\begin{cases} F_1 = 99 \\ F_2 = 1/2 \end{cases}$; $\begin{cases} F_1 = 80 \\ F_2 = 10 \end{cases}$, etc.

3.- Las expresiones $\frac{3}{x} + 4y = 1$ y $x \cdot y = 1$ no son lineales.

4.- La expresión $x^2 + y^2 = 36$ es una ecuación de segundo grado en dos variables, que es la ecuación de la circunferencia de radio 6 y centro en (0, 0). Cada punto P(x, y) de la circunferencia es solución de la ecuación. Como la circunferencia tiene infinitos puntos, la ecuación dada tiene infinitas soluciones.

En el capítulo 6 retomaremos el tema de ecuaciones lineales.

2 . 4 Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas

Ejemplo:

Un comercio vende calculadoras aritméticas a $7.50 y científicas a $18.00. Cierto día el comerció vendió 16 calculadoras por un importe total de $193.50. ¿Cuántas calculadoras eran aritméticas?

Primero identificamos que hay dos tipos de calculadoras en venta, si llamamos x a la cantidad de calculadoras aritméticas e y a la cantidad de calculadoras científicas, podemos traducir el problema al lenguaje algebraico de la siguiente manera: $x + y = 16$ que es el total de calculadoras vendidas y por otro lado el monto total vendido: $7.50\,x + 18.00\,y = 193.50$.

Estas ecuaciones determinan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 7.50\, x + 18.00\, y = 193.50 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

resolverlo, significa encontrar valores para las incógnitas *x* e *y* que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.
Despejamos indistintamente *x* ó *y* de la primera ecuación, por ejemplo

$$x = 16 - y \qquad \textbf{(2)}$$

a esta expresión la reemplazamos en la segunda ecuación $7.50(16 - y) + 18.00\, y = 193.50$, operando algebraicamente: $120 + 10.50y = 193.50 \;\rightarrow\; y = 7$, llevamos este valor a **(2)** y obtenemos $x = 9$.
Esta es la supuesta solución del sistema, para estar seguros debemos verificar los valores en ambas ecuaciones de **(1)**, es decir,

$$\begin{cases} 9 + 7 = 16 \\ 7.50 \cdot 9 + 18.00 \cdot 7 = 193.50 \end{cases}$$

Por lo tanto, el par $(x,\ y) = (9,\ 7)$ es solución matemática del sistema. La respuesta al problema es:
Respuesta: El negocio vendió 9 calculadoras aritméticas.

Los sistemas lineales aparecen frecuentemente en situaciones de la física, química, ciencias naturales, etc. como también en ciencias humanas y sociales, (economía, psicología, sociología).
Hay métodos convencionales de resolución de sistemas lineales: **Sustitución**, **Eliminación (o Reducción por suma o resta)** e **Igualación**. Estos métodos se basan en una secuencia de operaciones elementales. Además hay otros métodos: Gauss, Regla de Cramer (o Determinantes) .
Otra cuestión para resaltar es que a los sistemas sencillos de dos y tres variables por lo general es más fácil de resolverlos por los métodos convencionales, pero para un sistema de más de tres variables es conveniente utilizar otros métodos.
Repasaremos dos métodos de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlos, es encontrar la solución, es decir, el valor de las incógnitas, para ello se siguen ciertas técnicas que dependen de la situación de cada sistema, pues cualquier método de resolución de sistemas es válido, ya que proveen la misma solución.

2. 4 .1 Método de Sustitución

Como su nombre lo indica, se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, es la manera más natural de resolver un sistema. Los **pasos a seguir** para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son:

1.- Elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas en términos de la otra, en general, es la incógnita más fácil de despejar.

2.- Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y nos queda una ecuación en una incógnita y se resuelve.

3.- Luego, llevamos este resultado a la ecuación despejada en el paso **1** para obtener la otra incógnita.

4.- Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplos:

1.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$.

Paso 1: Después de observar ambas ecuaciones, podemos despejar y de la primera ecuación:

$$2x+3y=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1-2x}{3}. \qquad \textbf{(1)}$$

Paso 2: Reemplazamos ahora en la segunda ecuación: $2x-6\left(\frac{1-2x}{3}\right)=2$

Nos queda una ecuación de primer grado en una incógnita, cuya solución es: $x=2/3$.

Paso 3: El y correspondiente lo obtenemos sustituyendo este valor de x en **(1)**: $y=\frac{1-\frac{4}{3}}{3}=-\frac{1}{9}$. Por la tanto: $(x_o, y_o)=(2/3\,,-1/9)$.

Paso 4: Sustituimos $(2/3\,,-1/9)$ en ambas ecuaciones, para verificar que es solución:

$$\begin{cases} 2\frac{2}{3}+3\left(-\frac{1}{9}\right)=1 \\ 2\frac{2}{3}-6\left(-\frac{1}{9}\right)=2 \end{cases} \quad \text{operando} \quad \begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1 \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2 \end{cases}$$

Como se verifican ambas, la **solución** es: $(x_o, y_o)=(2/3\,,-1/9)$.

2.- El sistema $\begin{cases} x+0y=4 \\ 0x+y=5 \end{cases}$, tiene **solución única**: $(x_o, y_o)=(4,5)$, pues es evidente que verifica ambas ecuaciones. El **sistema es determinado**.

3.- Resolver el sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x-y=6 \end{cases}$

Observamos ambas ecuaciones, vemos que es más sencillo despejar y de la segunda: $y=5x-6$, llevamos esta expresión a la primera ecuación: $3x-2(5x-6)=5$; operando algebraicamente obtenemos: $x=1$, sustituimos este valor de x en la expresión despejada de y: $y=5.1-6=-1$. Por lo tanto, la solución aparente que obtuvimos es: $(x,y)=(1,-1)$.
Verifiquemos si es solución del sistema, para ello reemplazamos el par obtenido en ambas ecuaciones: $\begin{cases} 3.1-2(-1)=5 \\ 5.1+1=6 \end{cases}$, efectivamente se cumplen las dos igualdades, esto quiere decir que la **única solución** es: $(x,y)=(1,-1)$.

Queda para el alumno identificar los pasos sugeridos.

4.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$

Después de observar ambas ecuaciones vemos que es indistinto la incógnita a elegir para despejar, por ejemplo, nos decidimos por la primera ecuación: $x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}$ y la reemplazamos en la segunda: $4\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 5y = 3$, resolviendo tenemos $y = -1$, ahora llevamos este valor a la expresión despejada de x : $x = \frac{3}{2}(-1) + \frac{7}{2} = 2$, luego la supuesta solución es $(x, y) = (2, -1)$.
Queda para el lector verificar el paso 4 y resolver el sistema nuevamente despejando la incógnita *y.*

Los cuatro ejemplos anteriores muestran **sistemas con solución única**, veamos ahora el siguiente ejemplo:

5.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación $y = 4 - 2x$, reemplazamos en la segunda ecuación, $-6x - 3(4 - 2x) = -12$, operando obtenemos $0x = 0$, esta igualdad se cumple para cualquier valor de x , es decir, el sistema tiene **infinitas soluciones**, por ejemplo: $(0, 4)$; $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$; $(2, 0)$; etc... son soluciones.
Si observamos detenidamente el sistema, vemos que la primera ecuación multiplicada por -3, es igual a la segunda, esto nos dice que en realidad tenemos una sola ecuación con dos incógnitas.
Por lo tanto, en forma general la solución del sistema se puede expresar como $(t\ ,\ 4 - 2t)$, donde t es un número real. Para cualquier número real que se asigne a t, obtenemos el valor de y correspondiente, en este caso, se dice que el sistema es **indeterminado.**

6.- Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 10y = 8 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

Observamos que las dos ecuaciones son prácticamente la misma, pues si a la primera la dividimos por 2 tenemos una sola ecuación, por lo tanto tiene infinitas soluciones.
También en este caso se dice que el sistema es indeterminado. Operando se llega a una expresión del tipo $0.x = 0$ ó $0.y = 0$, válida para todo valor de x ó de y. Es decir, las **infinitas soluciones**: $(x\ ,\ y) = \left(x\ ,\ \dfrac{\frac{4}{3} - 5x}{3}\right)$ de una ecuación también lo son de la otra.

En los seis ejemplos anteriores los **sistemas son compatibles o consistentes**, porque todos tienen solución.
A continuación veremos dos ejemplos con otras características:

7.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = -2x + 5$ y la reemplazamos en la segunda:
$4x + 2(-2x + 5) = 8$, resolviendo obtenemos: $0\,x = -2$, ¡¡absurdo!!, luego el sistema **no** tiene solución o también se dice que el **sistema es incompatible o inconsistente**.

8.- Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

Es imposible encontrar una misma solución para ambas ecuaciones, nuevamente se dice que el sistema no tiene solución o que es incompatible (inconsistente) y en este caso se llega operando a una expresión del tipo $0\,x = 2$ ó $0\,y = 2$.

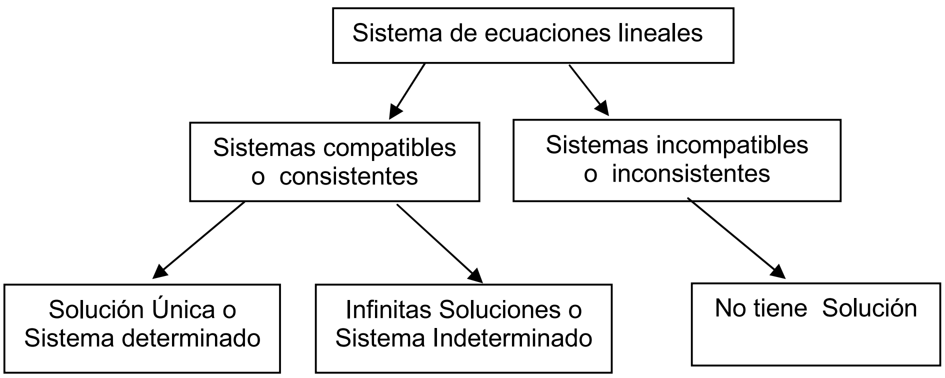
Resumiendo: Dados $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$, hemos analizado sistemas del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Resolver un sistema de ecuaciones **(1)**, es encontrar un par (x_o, y_o) que será solución del sistema si y sólo si, verifica **ambas** ecuaciones **simultáneamente**, es decir,

$$\begin{cases} a_1 x_o + b_1 y_o = c_1 \\ a_2 x_o + b_2 y_o = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

El sistema **(1)** puede tener una ó infinitas soluciones ó no tener solución. Estos resultados podemos resumirlos en el siguiente cuadro:



EJERCICIOS

1.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 78 \\ 4x + y = 54 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ x/5 = y/4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 6x + 5y = -1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -3x + 7y = 4 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}y = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

2.- El perímetro de un rectángulo mide 17 *cm* y su base mide 0.1 *dm* más que el doble de la altura. Se quiere averiguar cuales son las medidas en metros del rectángulo.

3.- La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble de primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son los números?

4.- Se necesitaron 30 *Km* de cerca para un campo rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 *Km*?

---

2. 4. 2 Método de Reducción por suma o resta o de Eliminación

Recordemos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjuntos solución.
El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente. En esencia consiste primero en ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, si no es así se trata de acomodar para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos , esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Los **pasos a seguir** son:

1.- Preparamos ambas ecuaciones, multiplicando (dividiendo) por una constante (número) adecuada para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, salvo signo que puede ser positivo (o negativo), en ambas ecuaciones.

2.- Restamos (o sumamos), según signo del coeficiente, miembro a miembro ambas ecuaciones y con ello desaparece una incógnita, así reducimos el número de ecuaciones, en nuestro caso a una ecuación.

3.- Resolvemos la ecuación obtenida.

4.- Luego a este resultado lo llevamos a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener la otra incógnita (o podemos emplear la misma técnica para despejar la otra incógnita).

5.- Verificar la solución obtenida, en ambas ecuaciones.

Ejemplos: Resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

a) Después de observar el sistema vemos que x tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, por lo tanto restando miembro a miembro obtenemos la ecuación: $y + 5y = 6$ de donde y =1, finalmente reemplazado en la primera ecuación resulta x = 2.

Verificación: $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \end{cases}$; luego, la solución única es: $(x,\ y) = (2,\ 1)$

b) En este ejemplo después de observar el sistema, tenemos dos posibilidades:

Primero: Igualamos los coeficientes de x multiplicando por 2 la primera ecuación:
$\begin{cases} 4x + 6y = 38 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$, restamos miembro a miembro y obtenemos $y = 3$.
Ahora multiplicamos la segunda ecuación por 3, para igualar los coeficientes de y :
$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 12x + 3y = 69 \end{cases}$, restando miembro a miembro tenemos x = 5.

Verificación: $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 4 \cdot 5 + 3 = 23 \end{cases}$; luego la solución única es: $(x,\ y) = (5,\ 3)$

Segundo: En la primera ecuación podemos igualar los coeficientes de y, si dividimos por 3:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = \frac{1}{3} \\ 4x + y = 23 \end{cases}$$

Queda para el lector completar el ejemplo y verificar que se obtiene la misma solución.