CAPÍTULO

2 Lenguaje Algebraico y Ecuaciones

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así el ***gran paso de la aritmética al álgebra****. La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados*
Las ***ecuaciones*** *y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones representan al mismo número. Por* ***ejemplo****, la fórmula del área de un círculo es:* $A = \pi r^2$. *El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión:* πr^2 **,** *pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio:* r .
A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella. En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación.
Los problemas de aplicación no vienen en forma " resuelva la ecuación", sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Cualquier solución matemática debe ser verificada si es solución del problema en cuestión, porque podría tener solución matemática que carezca de sentido con el contexto del problema. Los problemas que se te proporcionará serán de mayor o menor realismo con objeto de presentarte ejercicios para calcular el o los valores de ***x*** *a lo largo de toda la unidad.*

En este capítulo:

- *Recordaremos los conceptos necesarios para operar correctamente con igualdades.*
- *Desarrollaremos habilidad para resolver problemas aplicando ecuaciones de primero y segundo grado en una y dos incógnitas y sistemas de ecuaciones de primer grado en dos incógnitas.*
- *Repasaremos cuestiones de* ***álgebra elemental****, casi todo lo que diremos podría considerarse de repaso de cursos anteriores.*
- *Integraremos todos los conceptos dados hasta ahora.*

2.1 El álgebra y el lenguaje simbólico

¿Qué es el álgebra?. Es el manejo de relaciones numéricas en los que una o más cantidades son desconocidas, **incógnitas,** a las que se las representa por letras, por lo cual el **lenguaje simbólico** da lugar al **lenguaje algebraico.** Las operaciones para números: suma, resta, producto, división, son conocidas como **operaciones algebraicas** y cualquier combinación de números y letras se conoce como **expresión algebraica**. Por lo tanto, al traducir un cierto problema al lenguaje algebraico, se obtienen expresiones algebraicas, que son una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se las denomina, en general, **variables o incógnitas** y las simbolizamos con las últimas letras del alfabeto, en cambio las primeras letras se emplean para simbolizar números arbitrarios pero fijos, que llamamos **constantes**.

Frecuentemente aparecen igualdades que son de distinto tipo: identidades, ecuaciones y fórmulas.
Las **operaciones básicas con expresiones algebraicas,** se utilizan en el importante proceso de resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y otras importantes aplicaciones de ellas.

Ejemplos:
Escribir en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

a) La base es el doble que la altura.
Si llamamos $b = base$ y $h = altura$, la expresión algebraica es: $b = 2h$, pero también se podría haber llamado $x = base$ e $y = altura$ entonces se obtendría: $x = 2y$.

b) Dos números pares consecutivos.
$2n$ representa un número par, el siguiente número par es $2n + 2$, donde n es cualquier número entero.

EJERCICIOS

1.- Escribir en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados.

a) El cuadrado de la suma de dos números reales es igual a la suma de sus cuadrados más el doble de su producto.
b) El espacio recorrido por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.
c) Un número elevado a la 10 significa multiplicar 10 veces ese número.
d) El producto de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.
e) La suma de tres números enteros es 54.
f) Escribir un número natural, su anterior y su posterior.
g) La superficie de un cuadrado de lado *x* es 121.
h) El cociente de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes de las potencias que se dividen

---

2.2 Identidades

La igualdad, es el símbolo que más veces se utiliza en Matemática. Gran parte de los desarrollos matemáticos consisten en la transformación de una expresión en otra igual a ella.

La **igualdad verifica** las siguientes propiedades:

- Para todo ***a,*** se verifica ***a = a***
- Para cualquier par de números ***a*** y ***b,*** si ***a = b*** entonces ***b = a.***
- Para cualquier terna de números ***a, b*** y ***c,*** si ***a = b*** y ***b = c*** entonces ***a = c.***
- Si a los dos miembros de una igualdad se le suma (o resta) el mismo número, se obtiene otra igualdad.
- Si a los dos miembros de una igualdad se la multiplica (o divide) por el mismo número distinto de cero, se obtiene otra igualdad.

Estas dos últimas propiedades se utilizan continuamente para hallar la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones.
Una **identidad** es una **igualdad algebraica** válida para cualquier número real que se le asigne a las letras que intervengan.

Ejemplos:

1. La expresión $\frac{1}{2}(2x+4)-x=x$ es una **igualdad algebraica,** que **no** es una **identidad**, sólo es cierta para $x = 2$.
2. La expresión $2(x-5)+1=2x-9$, recibe el nombre de **identidad**, por que es verdadera para todos los números reales.
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, es una **identidad** que se ha visto en la unidad anterior.

¿Cuál es la ventaja de las identidades?
Que se puede transformar una expresión algebraica en otra equivalente mediante operaciones elementales.

EJERCICIOS

1. Escribir cinco identidades que se han visto en la unidad anterior.
2. Averiguar si las siguientes igualdades son identidades:

a) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ **b)** $a+a+a=3a$ **c)** $a+a+a=15$ **;**

d) $x\cdot x\cdot x=x^3$ **e)** $x\cdot x^3=x^4$ **f)** $x\cdot x^2=729$;

3. Partiendo de cada una de las expresiones de la izquierda, usar identidades para obtener la expresión de la derecha:

a) $(x+3)(x+3)-(x^2+x+6) \longrightarrow 5x+3$

b) $(x^2-1)-(x-1)^2 \longrightarrow 2(x-1)$

c) $(x+2)(x+6)-(x+2)(x+5) \longrightarrow x+2$

2.3 Ecuaciones y resolución de problemas

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman **incógnitas.**
Resolver una ecuación consiste en transformar la igualdad en otra equivalente más sencilla, hasta obtener la solución, que es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial.
Una expresión como $x+(x+1)+(x+2)=33$ es una ecuación, sólo es cierta para $x=10$. La solución es $x=10$.
Hay ecuaciones con muchas soluciones, e incluso infinitas soluciones, por ejemplo, $x+y=1$, $sen\,x=0$ y otras que no tienen solución como: $x + 3 = x$. Por lo tanto, resolver una ecuación es obtener las soluciones, si existen, que la satisfacen.
Para resolver una ecuación se utiliza las propiedades de la relación de igualdad y las propiedes de los números.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar el resultado.

a) $-2x-3=5$ **b)** $5(x+3)=2x+3$

Solución:
a)

$-2x-3+3=5+3$ (sumamos a ambos miembros 3)

$-2x=8$ (realizamos las operaciones posibles)

$(-2x)\div(-2)=8\div(-2)$ (dividimos ambos miembros por -2)

$x=-4$ (realizo las operaciones).

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución.
Si reemplazamos en la ecuación original: $-2(-4) - 3 = 8 - 3 = 5$, vemos que la verifica.

b)

$5x + 15 = 2x + 3$	(en el primer miembro hemos aplicado la propiedad distributiva)
$5x + 15 - 15 = 2x + 3 - 15$	(restamos a ambos miembros 15 o sumamos el opuesto de 15)
$5x = 2x - 12$	(realizo las operaciones)
$5x - 2x = -12$	(sumamos el opuesto de $2x$ o restamos $2x$)
$3x = -12$	(realizo las operaciones)
$(3x) \div 3 = (-12) \div 3$	(dividimos ambos miembros por 3)
$x = -4$	(realizo las operaciones)

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución de la ecuación dada, pues si reemplazamos en ella se verifica la igualdad: $5(-4+3) = 2(-4) + 3 \quad \rightarrow \quad 5(-1) = -8 + 3 \quad \rightarrow \quad -5 = -5$.

Nota: Para asegurar que el valor encontrado es la solución buscada, es conveniente verificar en la ecuación original. A la solución también se le llama **raíz de la ecuación**.

2. 3 .1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{a\,x + b = 0 \text{ con } a \neq 0,\ a, b \in R} \quad \textbf{(1)}$$

Se llama de **primer grado** porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia uno.

Ejemplos:

1.- Consideremos la ecuación $x - 2 = 5x - 3$**,** no es de la forma **(1)**, pero operando algebraicamente obtenemos $4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$ que es la **solución** de la ecuación.
Queda para el lector verificar que efectivamente es la solución de la ecuación dada.

2.- Sea $x = x - 3$, operamos y obtenemos $0x = -3$, no existe ningún número real x que satisfaga la igualdad. Por lo tanto, esta ecuación **no tiene solución.**

3.- Expresiones como: $x = x$ ó $3x - 2 = 2(x-1) + x$, **tienen infinitas soluciones**, son ciertas para cualquier número real, son identidades.

EJERCICIOS

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 1 = 2 - 4x$

b) $22x - 7x - \frac{15}{2} = 10 - \left(\frac{7}{2}x - 1\right)$

c) $\frac{2x+1}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2}$

d) $\frac{x+1}{2} = \frac{15x + 11}{6}$

e) $6x - 24 = 5(x - 4) + x - 4$

f) $25x - 18 = 20 - 5(x + 3) + 30x$

g) $[2(x-3)-2]2-4(x-3)=2x-2$

h) $2(x-3)+4(x+5)=6$

i) $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$

j) $(x-3)x=x^2$

2.- Indicar cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado y luego encontrar su solución.

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{15x+11}{6}$

b) $\frac{2}{x+1}=2x+5$

c) $5+x=\frac{2}{x+3}$

d) $(x^2-1)(x+1)=0$

3.- a) La suma de tres números enteros consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?

b) Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma es igual a 117.

4.- De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcular la capacidad del depósito en centímetros cúbicos.

---

2 . 3 . 2 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0\ ,\ a,b,c\in R\ \ y\ \ a\neq 0} \qquad \textbf{(2)}$$

Observamos que la incógnita aparece elevada a la segunda potencia, decimos que la ecuación es **de grado dos** y la llamamos **ecuación cuadrática**.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

Ejemplos:

1.- La expresión $2x+3=5(x-3)$ es una ecuación de grado 1, con una incógnita y se llama de **primer grado.**

2.- La expresión $4-x=3x^2+5$ es una ecuación con una incógnita, de grado 2, o de segundo grado.

3.- La expresión $(x+2)(x+3)=0$ es una ecuación de segundo grado porque operando obtenemos: $x^2+5x+6=0$.

4.- La expresión $t(t+1)^2=3(t-7)$ es una ecuación de grado 3, pues operando queda $t^3+2t^2-2t+21=0$.

Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos raíces. Veamos algunas resoluciones sencillas mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

1.- a) $4x^2=400$, mediante operaciones algebraicas obtenemos: $x^2=10^2$ y aquí recordamos la propiedad de los números $\sqrt{x^2}=|x|$, con lo cual obtenemos: $x_1=10$ y $x_2=-10$, que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.

b) $21x^2 = 400$, completamos mediante operaciones algebraicas para obtener las raíces: $x_1 = \sqrt{400/21}$ y $x_2 = -\sqrt{400/21}$ y racionalizando resulta: $x_1 = \dfrac{20\sqrt{21}}{21}$ y $x_2 = \dfrac{-20\sqrt{21}}{21}$

2.- $t(t-10)=0$, observamos que el primer miembro es un producto de dos factores: *t* y *t* - 10. Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores es cero. En nuestro caso: *t*(*t* - 10) = 0, implica *t* = 0 ó *t* - 10 = 0, de donde se obtiene, *t* = 0 ó *t* = 10 . Por lo tanto, las raíces buscadas son: $t_1 = 0$ y $t_2 = 10$.

3.- $x^2 + 10x + 8 = 0$, en este caso no es sencillo despejar la incógnita para encontrar las raíces, debemos aplicar la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Considerando la ecuación general de segundo grado, **(2)**, las soluciones se encuentran usando la fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \textbf{(3)}$$

Identificamos los coeficientes *a, b y c,* de la siguiente manera: *a* el coeficiente del término cuadrático, *b* coeficiente del término lineal y *c* el término independiente. En este ejemplo, *a* = 1, *b* = 10 y *c* = 8.

La deducción de la fórmula es la siguiente:

$$\begin{array}{lcll}
ax^2 + bx + c & = & 0\ , & \text{sumamos a ambos miembros } -c, \\
ax^2 + bx & = & -c & \text{multiplicamos a ambos miembros por } 4a, \\
4a^2x^2 + 4abx & = & -4ac & \text{sumamos a ambos miembros } b^2, \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 & = & b^2 - 4ac & \text{el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto,} \\
(2ax + b)^2 & = & b^2 - 4ac & \text{aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros,} \\
\sqrt{(2ax + b)^2} & = & \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{por definición de valor absoluto,} \\
|2ax + b| & = & \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{entonces,} \\
2ax + b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} &
\end{array}$$

En consecuencia, despejando *x*, tenemos la fórmula (3) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El doble signo en la fórmula antes de la raíz cuadrada, nos proporciona las dos soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Ejemplos: Encontrar las dos raíces de las ecuaciones de segundo grado:

1.- $x^2 + x - 6 = 0$, aplicando la fórmula **(3)**, tenemos $a = 1$, $b = 1$ y $c = -6$ y reemplazando en **(3)** obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -3$.

2.- $9x^2 + 6x + 1 = 0$, análogamente observando la ecuación tenemos: *a* = 2, *b* = 6 y *c* = 1, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$

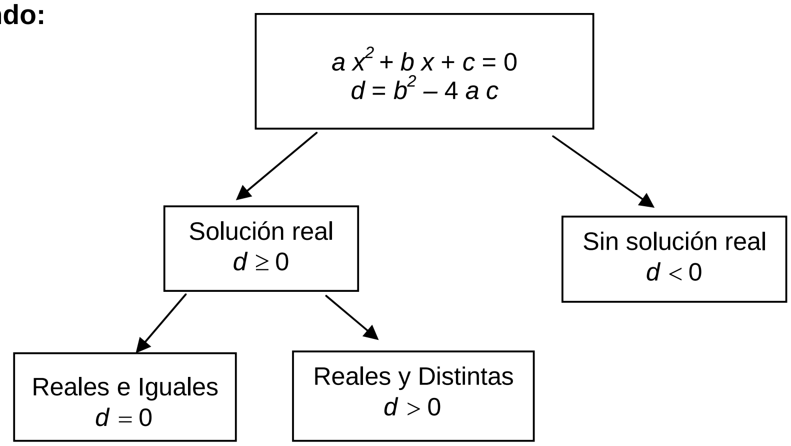
3.- $x^2 - 2x + 5 = 0$, finalmente aquí tenemos: $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

como recordamos la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real.
Analicemos cada una de las soluciones de los tres ejemplos anteriores. En el primero observamos que tiene dos raíces reales distintas, en el segundo, las raíces son reales e iguales y el último no tiene solución real.

Analicemos el radicando de la fórmula **(3)**, llamado **discriminante.** Sea $d = b^2 - 4ac$, si $d < 0$ no tiene solución real; si $d > 0$ tiene raíces reales distintas, y si $d = 0$, las raíces reales coinciden.

Resumiendo:



EJERCICIOS

1: Dadas las ecuaciones:

a) $9 = 5y - 3$; **b)** $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$; **c)** $6y + 5 = 2y + 7$ **;** **d)** $3x^2 - 6 = (x+2)(x-3)$ y las soluciones: $-0.5; -3; 2.4; 1/2; 0, -1/2$, averiguar a cuál ecuación corresponde cada solución y determinar el grado que tiene cada ecuación.

2.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado pero previamente identificar si son o no completas:

a) $2t^2 + 4t - 6 = 0$ **b)** $(t+7)(t-1) + (t+1)^2 = 0$ **c)** $x^2 - x - 2 = 0$

d) $(v+7)(v-3) = 0$ **e)** $t^2 + 4t = 0$ **f)** $t^2 - 1 = 0$

3.- Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **b)** $2t^2 - 4t + 1 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 6 = 0$

4.- Utilizando el discriminante decir qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ **b)** $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 2x + 14 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

5.- a) Efectuar el producto (x - 4) (x – 3) .

b) Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

c) ¿Existe alguna relación entre los coeficientes –7 y 12 con las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$?

6.- Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ *con* $b, c \in R$ cuyas raíces son x_1 y x_2, demostrar: $x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$.

7.- El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4.¿Cuál es el número?

8.- ¿Cuál es el número cuyo triple supera en dos a su cuadrado?

---

2 . 3 . 3 Ecuaciones con dos incógnitas

Ya hemos visto ecuaciones del tipo $ax + b = 0$ (de primer grado con una incógnita) y ahora veremos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, del tipo $a\ x + b\ y + c = 0$ con $a, b, c \in R$. Tiene como solución un par de valores (x,y) que la satisfacen. A este tipo de ecuaciones también se las suele llamar **ecuaciones lineales**. La linealidad viene dada por que ambas incógnitas están elevadas a la potencia uno y no se multiplican entre sí.

Ejemplos:

1.- $x - 2y = 0$ es una ecuación lineal en dos variables: x e y, tiene infinitas soluciones, como por ejemplo: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5/2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ etc.

o también se pueden escribir como par ordenado: $(4,\ 2)$; $(5,\ 5/2)$; $(-2,\ -1)$; $(-4,\ -2)$

2.- Al determinar las fuerzas F_1 *y* F_2 que actúan sobre una viga, podemos encontrar una ecuación tal como $2F_1 + 4F_2 = 200$ que tiene como soluciones:

$\begin{cases} F_1 = 99 \\ F_2 = 1/2 \end{cases}$; $\begin{cases} F_1 = 80 \\ F_2 = 10 \end{cases}$, etc.

3.- Las expresiones $\dfrac{3}{x} + 4y = 1$ y $x \cdot y = 1$ no son lineales.

4.- La expresión $x^2 + y^2 = 36$ es una ecuación de segundo grado en dos variables, que es la ecuación de la circunferencia de radio 6 y centro en (0, 0). Cada punto P(x, y) de la circunferencia es solución de la ecuación. Como la circunferencia tiene infinitos puntos, la ecuación dada tiene infinitas soluciones.

En el capítulo 6 retomaremos el tema de ecuaciones lineales.

2 . 4 Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas

Ejemplo:

Un comercio vende calculadoras aritméticas a \$7.50 y científicas a \$18.00. Cierto día el comerció vendió 16 calculadoras por un importe total de \$193.50. ¿Cuántas calculadoras eran aritméticas?

Primero identificamos que hay dos tipos de calculadoras en venta, si llamamos x a la cantidad de calculadoras aritméticas e y a la cantidad de calculadoras científicas, podemos traducir el problema al lenguaje algebraico de la siguiente manera: $x + y = 16$ que es el total de calculadoras vendidas y por otro lado el monto total vendido: $7.50\,x + 18.00\,y = 193.50$.

Estas ecuaciones determinan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 7.50\,x + 18.00\,y = 193.50 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

resolverlo, significa encontrar valores para las incógnitas *x* e *y* que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.
Despejamos indistintamente *x* ó *y* de la primera ecuación, por ejemplo

$$x = 16 - y \qquad \textbf{(2)}$$

a esta expresión la reemplazamos en la segunda ecuación $7.50(16 - y) + 18.00\,y = 193.50$, operando algebraicamente: $120 + 10.50y = 193.50 \;\rightarrow\; y = 7$, llevamos este valor a **(2)** y obtenemos $x = 9$.
Esta es la supuesta solución del sistema, para estar seguros debemos verificar los valores en ambas ecuaciones de **(1)**, es decir,

$$\begin{cases} 9 + 7 = 16 \\ 7.50 \cdot 9 + 18.00 \cdot 7 = 193.50 \end{cases}$$

Por lo tanto, el par $(x,\ y) = (9,\ 7)$ es solución matemática del sistema. La respuesta al problema es:
Respuesta: El negocio vendió 9 calculadoras aritméticas.

Los sistemas lineales aparecen frecuentemente en situaciones de la física, química, ciencias naturales, etc. como también en ciencias humanas y sociales, (economía, psicología, sociología).
Hay métodos convencionales de resolución de sistemas lineales: **Sustitución**, **Eliminación (o Reducción por suma o resta)** e **Igualación**. Estos métodos se basan en una secuencia de operaciones elementales. Además hay otros métodos: Gauss, Regla de Cramer (o Determinantes) .
Otra cuestión para resaltar es que a los sistemas sencillos de dos y tres variables por lo general es más fácil de resolverlos por los métodos convencionales, pero para un sistema de más de tres variables es conveniente utilizar otros métodos.
Repasaremos dos métodos de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlos, es encontrar la solución, es decir, el valor de las incógnitas, para ello se siguen ciertas técnicas que dependen de la situación de cada sistema, pues cualquier método de resolución de sistemas es válido, ya que proveen la misma solución.

2. 4 .1 Método de Sustitución

Como su nombre lo indica, se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, es la manera más natural de resolver un sistema. Los **pasos a seguir** para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son:

1.- Elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas en términos de la otra, en general, es la incógnita más fácil de despejar.

2.- Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y nos queda una ecuación en una incógnita y se resuelve.

3.- Luego, llevamos este resultado a la ecuación despejada en el paso **1** para obtener la otra incógnita.

4.- Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplos:

1.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$.

Paso 1: Después de observar ambas ecuaciones, podemos despejar y de la primera ecuación:

$$2x+3y=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1-2x}{3}. \qquad \textbf{(1)}$$

Paso 2: Reemplazamos ahora en la segunda ecuación: $2x-6\left(\frac{1-2x}{3}\right)=2$

Nos queda una ecuación de primer grado en una incógnita, cuya solución es: $x=2/3$.

Paso 3: El y correspondiente lo obtenemos sustituyendo este valor de x en **(1)**: $y=\frac{1-\frac{4}{3}}{3}=-\frac{1}{9}$. Por la tanto: $(x_o, y_o)=(2/3, -1/9)$.

Paso 4: Sustituimos $(2/3, -1/9)$ en ambas ecuaciones, para verificar que es solución:

$$\begin{cases} 2\frac{2}{3}+3\left(-\frac{1}{9}\right)=1 \\ 2\frac{2}{3}-6\left(-\frac{1}{9}\right)=2 \end{cases} \quad \text{operando} \quad \begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1 \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2 \end{cases}$$

Como se verifican ambas, la **solución** es: $(x_o, y_o)=(2/3, -1/9)$.

2.- El sistema $\begin{cases} x+0y=4 \\ 0x+y=5 \end{cases}$, tiene **solución única**: $(x_o, y_o)=(4, 5)$, pues es evidente que verifica ambas ecuaciones. El **sistema es determinado**.

3.- Resolver el sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x-y=6 \end{cases}$

Observamos ambas ecuaciones, vemos que es más sencillo despejar y de la segunda: $y=5x-6$, llevamos esta expresión a la primera ecuación: $3x-2(5x-6)=5$; operando algebraicamente obtenemos: $x=1$, sustituimos este valor de x en la expresión despejada de y: $y=5.1-6=-1$. Por lo tanto, la solución aparente que obtuvimos es: $(x, y)=(1, -1)$.
Verifiquemos si es solución del sistema, para ello reemplazamos el par obtenido en ambas ecuaciones: $\begin{cases} 3.1-2(-1)=5 \\ 5.1+1=6 \end{cases}$, efectivamente se cumplen las dos igualdades, esto quiere decir que la **única solución** es: $(x, y)=(1, -1)$.

Queda para el alumno identificar los pasos sugeridos.

4.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$

Después de observar ambas ecuaciones vemos que es indistinto la incógnita a elegir para despejar, por ejemplo, nos decidimos por la primera ecuación: $x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}$ y la reemplazamos en la segunda: $4\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 5y = 3$, resolviendo tenemos $y = -1$, ahora llevamos este valor a la expresión despejada de x : $x = \frac{3}{2}(-1) + \frac{7}{2} = 2$, luego la supuesta solución es $(x, y) = (2, -1)$.
Queda para el lector verificar el paso 4 y resolver el sistema nuevamente despejando la incógnita *y.*

Los cuatro ejemplos anteriores muestran **sistemas con solución única**, veamos ahora el siguiente ejemplo:

5.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación $y = 4 - 2x$, reemplazamos en la segunda ecuación, $-6x - 3(4 - 2x) = -12$, operando obtenemos $0x = 0$, esta igualdad se cumple para cualquier valor de x , es decir, el sistema tiene **infinitas soluciones**, por ejemplo: $(0, 4)$; $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$; $(2, 0)$; etc... son soluciones.
Si observamos detenidamente el sistema, vemos que la primera ecuación multiplicada por -3, es igual a la segunda, esto nos dice que en realidad tenemos una sola ecuación con dos incógnitas.
Por lo tanto, en forma general la solución del sistema se puede expresar como $(t\ ,\ 4 - 2t)$, donde *t* es un número real. Para cualquier número real que se asigne a *t*, obtenemos el valor de *y* correspondiente, en este caso, se dice que el sistema es **indeterminado**.

6.- Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 10y = 8 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

Observamos que las dos ecuaciones son prácticamente la misma, pues si a la primera la dividimos por 2 tenemos una sola ecuación, por lo tanto tiene infinitas soluciones.
También en este caso se dice que el sistema es indeterminado. Operando se llega a una expresión del tipo $0.x = 0$ ó $0.y = 0$, válida para todo valor de *x* ó de *y*. Es decir, las **infinitas soluciones**: $(x\ ,\ y) = \left(x\ ,\ \dfrac{\frac{4}{3} - 5x}{3}\right)$ de una ecuación también lo son de la otra.

En los seis ejemplos anteriores los **sistemas son compatibles o consistentes**, porque todos tienen solución.
A continuación veremos dos ejemplos con otras características:

7.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = -2x + 5$ y la reemplazamos en la segunda:
$4x + 2(-2x + 5) = 8$, resolviendo obtenemos: $0\,x = -2$, ¡¡absurdo!!, luego el sistema **no** tiene solución o también se dice que el **sistema es incompatible o inconsistente**.

8.- Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

Es imposible encontrar una misma solución para ambas ecuaciones, nuevamente se dice que el sistema no tiene solución o que es incompatible (inconsistente) y en este caso se llega operando a una expresión del tipo $0\,x = 2$ ó $0\,y = 2$.

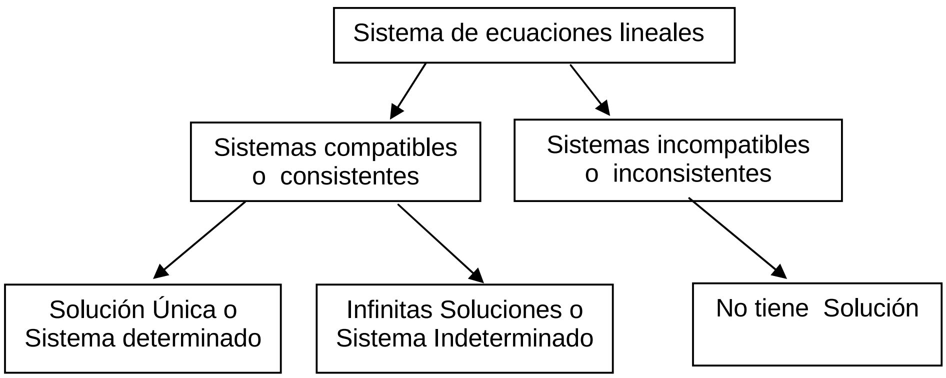
Resumiendo: Dados $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$, hemos analizado sistemas del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Resolver un sistema de ecuaciones **(1)**, es encontrar un par (x_o, y_o) que será solución del sistema si y sólo si, verifica **ambas** ecuaciones **simultáneamente**, es decir,

$$\begin{cases} a_1 x_o + b_1 y_o = c_1 \\ a_2 x_o + b_2 y_o = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

El sistema **(1)** puede tener una ó infinitas soluciones ó no tener solución. Estos resultados podemos resumirlos en el siguiente cuadro:



EJERCICIOS

1.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 78 \\ 4x + y = 54 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ x/5 = y/4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 6x + 5y = -1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -3x + 7y = 4 \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{5}y = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

2.- El perímetro de un rectángulo mide 17 *cm* y su base mide 0.1 *dm* más que el doble de la altura. Se quiere averiguar cuales son las medidas en metros del rectángulo.

3.- La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble de primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son los números?

4.- Se necesitaron 30 *Km* de cerca para un campo rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 *Km*?

---

2. 4. 2 Método de Reducción por suma o resta o de Eliminación

Recordemos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjuntos solución.
El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente. En esencia consiste primero en ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, si no es así se trata de acomodar para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos , esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Los **pasos a seguir** son:

1.- Preparamos ambas ecuaciones, multiplicando (dividiendo) por una constante (número) adecuada para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, salvo signo que puede ser positivo (o negativo), en ambas ecuaciones.

2.- Restamos (o sumamos), según signo del coeficiente, miembro a miembro ambas ecuaciones y con ello desaparece una incógnita, así reducimos el número de ecuaciones, en nuestro caso a una ecuación.

3.- Resolvemos la ecuación obtenida.

4.- Luego a este resultado lo llevamos a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener la otra incógnita (o podemos emplear la misma técnica para despejar la otra incógnita).

5.- Verificar la solución obtenida, en ambas ecuaciones.

Ejemplos: Resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

a) Después de observar el sistema vemos que *x* tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, por lo tanto restando miembro a miembro obtenemos la ecuación: $y + 5y = 6$ de donde *y* =1, finalmente reemplazado en la primera ecuación resulta *x* = 2.

Verificación: $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \end{cases}$; luego, la solución única es: $(x,\ y) = (2,\ 1)$

b) En este ejemplo después de observar el sistema, tenemos dos posibilidades:

Primero: Igualamos los coeficientes de *x* multiplicando por 2 la primera ecuación:
$\begin{cases} 4x + 6y = 38 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$, restamos miembro a miembro y obtenemos $y = 3$.
Ahora multiplicamos la segunda ecuación por 3, para igualar los coeficientes de y :
$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 12x + 3y = 69 \end{cases}$, restando miembro a miembro tenemos *x* = 5.

Verificación: $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 4 \cdot 5 + 3 = 23 \end{cases}$; luego la solución única es: $(x,\ y) = (5,\ 3)$

Segundo: En la primera ecuación podemos igualar los coeficientes de *y,* si dividimos por 3:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = \frac{1}{3} \\ 4x + y = 23 \end{cases}$$

Queda para el lector completar el ejemplo y verificar que se obtiene la misma solución.

b) En este sistema las incógnitas no tienen coeficientes iguales ni tampoco múltiplos uno del otro, por lo tanto, tenemos dos opciones para resolverlo: elegir el método de sustitución o el método de reducción. Lo haremos por este último.

Primero: Tratamos de igualar los coeficientes de *x*, para ello procedemos de la siguiente manera, multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por 3: $\begin{cases} 15x - 30y = 10 \\ 15x + 12y = 3 \end{cases}$, ahora restamos miembro a miembro: $42y = -7$, es decir, $y = -1/6$, finalmente miramos el sistema dado y vemos que nos conviene reemplazar en la primera ecuación y obtenemos el valor de $x = 1/3$. Queda para el lector la verificación de que la solución única es: $(x,\ y) = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6}\right)$.

Segundo: Podríamos haber elegido de igualar los coeficientes de *y,* multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3: $\begin{cases} 6x - 12y = 4 \\ 15x + 12y = 3 \end{cases}$, sumando miembro a miembro resulta $x = 1/3$.

Queda para el lector encontrar el valor de *y* por este segundo camino. Escribir la solución y verificarla.
Además, COMPLETAR LOS PASOS INTERMEDIOS DE LOS TRES EJEMPLOS.

EJERCICIOS

1.- Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x - y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$

2.- Dos amigos fueron de visita a una granja en la que había pavos y corderos. Al salir uno de ellos le pregunto al otro: "¿Cuántos pavos y corderos había? Averígualo, vi 72 ojos y 122 patas".

3.- En un hotel hay habitaciones simples y dobles. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene el hotel?

4.- Un cine vende boletos a 8$ cada uno pero, a las personas de la tercera edad se les hace un descuento de 2$. En una tarde, el cine vendió 525 boletos y recaudó 3580$. ¿Cuántos boletos vendió de cada tipo?

5.- El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 *cm*. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuáles son las medidas de los lados en metros?

---

2 . 5 Cómo plantear y resolver Problemas

A lo largo del desarrollo de esta unidad hemos visto problemas sencillos, en esta sección veremos gran cantidad de problemas resueltos para que tengamos al menos una base y técnicas para resolverlos.
En los problemas nos planteamos la o las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas. Lo difícil es identificar la información que nos lleva a la ecuación que debemos resolver, esto se debe a menudo, a que parte de la información se infiere, pero no está explícitamente establecida.
A continuación mostraremos la forma en que se utilizan las expresiones algebraicas para plantear y resolver ecuaciones lineales y /o cuadráticas en alguna de sus aplicaciones. Son ellas y sus soluciones de gran importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una de las aplicaciones más importantes se presenta en matemáticas, física, ingeniería y otros campos.

2.5.1 Pasos útiles para resolver problemas

I.- COMPRENDER EL PROBLEMA **II.- CONCEBIR un plan** **III.- EJECUTAR el plan** **IV.- EXAMINAR la solución obtenida**

I.- COMPRENDER el problema:

- Leer el enunciado. Señalamos cuáles son los datos, qué es lo que se conoce del problema.
- Elaboramos, si es necesario, un mapa conceptual o un esquema de la situación.
- Encontramos la relación entre los datos y las incógnitas.
- Introducimos una notación adecuada.
- Si hay alguna figura relacionada con el problema, la dibujamos.

En síntesis, debemos plantearnos las siguientes preguntas:
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición que relaciona los datos con las incógnitas? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Es redundante? ¿Es contradictoria?

II.- CONCEBIR un plan:
"Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a grosso *modo*, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita".
Para concebir un plan debemos tener claro si nuestros conocimientos son suficientes, puesto que es imposible resolver un problema si desconocemos por completo el tema del cual trata.
Con frecuencia es adecuado abordar un problema planteándonos las siguientes preguntas:
¿Hemos resuelto un problema semejante? o ¿Hemos visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conocemos un problema relacionado con éste?.
Si no podemos resolver el problema propuesto tratamos de resolver primero algún problema similar más sencillo que nos aporte información para el nuestro.

III.- EJECUTAR el plan:

Esta etapa también hay que plantearla de una manera flexible, alejada de todo mecanicismo. Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal, que necesariamente se van a producir saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos. ¿Se puede ver claramente qué cada paso es correcto? Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con ésto? Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.
Cuando tropezamos con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:
Supone:
Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se debe poner atención en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
¿Es posible comprobar la solución?
¿Es posible encontrar alguna otra solución?

Siguiendo estos cuatro pasos podremos tener una buena idea y base para pensar acerca de cómo encarar distintas situaciones problemáticas y adquirir más habilidad para resolverlos no solo aquí, sino nos serán útiles cuando se nos presenten a lo largo de la carrera y por lo tanto estaremos mejor preparados.

Ejemplo 1

Un lado de un triángulo isósceles mide 3 *cm* menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 *cm*. ¿Cuánto mide cada lado?

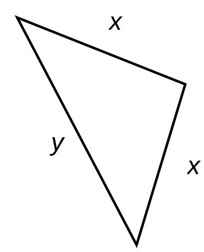
Solución:

I.- COMPRENDER el problema

a) Primero leemos el problema y determinamos que nos pide. Es decir, ubicamos cuál o cuáles son las incógnitas e introducimos la notación, por ejemplo x . Acá representa la longitud de uno de los dos lados iguales del triángulo e y al lado desigual.

b) Consideramos los datos:

Uno de los datos que tenemos es que el lado desigual mide 3*cm* menos que la suma de los lados iguales, es decir, $y = 2x - 3$ y el otro dato es que el perímetro es de 33*cm*, es decir, $2x + y = 33$



II.- CONCEBIR un plan

De acuerdo al punto **I**, vemos que obtuvimos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y = 33 \end{cases}.$$

III.- EJECUTAR el plan:

Es resolver dicho sistema de ecuaciones por cualquier método. Obtenemos x = 9 e y = 15, que es la solución matemática del sistema.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:

Verificamos que la solución matemática es la solución del problema: Según la notación que adoptamos los lados iguales miden 9 *cm* y el tercer lado 15 *cm*, luego el perímetro, que es la suma de las longitudes de los tres lados, es: 9 + 9 + 15 = 33, como se verifica el resultado, entonces $x = 9\,cm$ e y = 15 *cm*, es la solución del problema. Finalmente,

Respuesta: Las longitudes de los lados del triángulo son: 9 *cm*, 9 *cm* y 15 *cm*.

Ejemplo 2

En una confitería han preparado 60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo puro de fruta.¿Cuánto jugo puro de ananá deben agregarle para que el refresco contenga el 20% de dicho jugo?
Resolvamos teniendo en cuenta los pasos sugeridos en la página 47:

1- Comprender el problema

- *Lectura comprensiva del texto*
- *¿Cuál es la incógnita?.*

Cantidad de jugo de ananá que deben agregarle a los 60 litros de refresco para que resulte uno con el 20% de jugo puro de ananá.

- *¿Cuáles son los datos?*

60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo de fruta.

2- Concebir un plan.

Sea “x” la cantidad (medida en litros) de jugo de ananá que debe agregarse.

Hacemos una tabla que representa las relaciones entre los datos y la incógnita:

	Tengo	Agrego jugo puro	Obtengo
Cantidad en litros de refresco	60	x	60 + x
Concentración de jugo puro de ananá	10%	100%	20%
Cantidad de jugo puro de ananá en litros	10% de 60 = 6	100% de x = x	20% de (60+x)= 0.2 (60+*x*)

El aspecto clave para convertir la información de la tabla en una ecuación, es observar que la cantidad total de jugo puro de ananá en la nueva mezcla debe ser igual a la que ya contenía más la que se agrega:

$$0.2(60+x)=6+x$$

3- Ejecutar el plan

Resolviendo la ecuación planteada obtenemos:

$$\begin{aligned} 6+x &= 12+0.2x \\ x-0.2x &= 12-6 \\ 0.8x &= 6 \\ x &= \frac{6}{0.8} = 7.5 \end{aligned}$$

Respuesta: Se debe agregar 7.5 *l* de jugo puro de ananá para que el refresco tenga una concentración del 20%.

4 - Examinar la solución obtenida

El comerciante va a obtener 67.5 *l* de refresco de ananá, el cual tiene la cantidad de 13.5 *l* de jugo puro, 6 litros antes de la mezcla más el agregado de 7.5 litros. Por otro lado, debemos verificar si los 13.5 *l* responden a la concentración pedida:

20% de (67.5) es 13.5 *l*.

Por lo cual podemos afirmar que la nueva cantidad de refresco que tiene el comerciante responde a lo pedido.

En los ejemplos que siguen, los cuatro pasos sugeridos en la resolución de problemas no los detallamos. Aconsejamos al lector resolver los ejemplos usando esta técnica antes de mirar la solución.

Ejemplo 3

Una máquina tiene una masa de 17 *Kgr*. Si está compuesta por dos partes y una de ellas pesa 3 *Kgr* más que la otra. ¿Cuáles son las masas respectivas?

Solución:

El problema nos pide calcular la masa de cada una de las partes que integran la máquina.
Sea m_1 = masa de la parte más liviana, con lo que hemos establecido una de las incógnitas (o también podríamos haber representado con ella a la parte más pesada o haber utilizado cualquier otra letra).
Además, como "una de ellas tiene una masa de 3 *Kgr* más que la otra", podemos escribir: $m_2 = m_1 + 3$.

Como las dos masas juntas pesan 17 *Kgr*, tenemos: $m_1 + m_2 = 17$, reemplazamos m_2 en esta expresión, obtenemos: $m_1 + m_1 + 3 = 17 \quad \rightarrow \quad 2m_1 = 14 \rightarrow \quad m_1 = 7$.
La solución del problema es:

Respuesta: La masa más liviana pesa 7 *Kgr* y la más pesada 10 *Kgr*

Ejemplo 4

Una solución de alcohol y agua contiene 2 *l* de alcohol y 6 *l* de agua. ¿Cuánto alcohol puro se debe añadir a esta solución para que la solución resultante tenga $\frac{2}{5}$ de alcohol?

Solución:

Llamemos *x* al número de litros de alcohol que debemos añadir a la solución cuyo volumen es de 8 *l* .
La cantidad final de alcohol que tendremos será: $2 + x$ y el volumen de la mezcla resultante será: 8+*x*. Por lo tanto el volumen de alcohol final comparado con el volumen total correspondiente de la mezcla debe ser: $\frac{2}{5}$. Esto significa: $\frac{2+x}{8+x} = \frac{2}{5}$, de donde *x* = 2.

Respuesta: Se debe añadir 2 litros de alcohol a la solución.

Queda para el lector verificar que hay que añadir 2*l* de alcohol puro a la solución original para tener 4*l* de alcohol en el volumen total de 10 *l*.

Ejemplo 5

Juan compró en enero de 2001 acciones en una empresa. En la misma fecha del 2002, las acciones habían bajado un 4%, pero su precio en enero de 2003 era un 10% superior al del año anterior. Hallar el porcentaje de variación de precio del 2003 respecto de la compra.

Solución:

Si el precio de las acciones en el 2001 fue de *x* pesos. El precio en el 2002 disminuyó en un 4% (0.4 pesos). Por lo tanto el precio de las acciones fue: $x - 0.4\ x = 0.96\ x$. En el año 2003, las acciones aumentaron un 10% respecto de $0.96\ x$, es decir, $0.1 \cdot 0.96\ x = 0.096\ x$. Por lo tanto, el precio final es de: $0.96\ x + 0.096\ x = 1.056\ x$.
El problema nos pide el porcentaje que varió el precio actual respecto del precio de compra, es decir, nos pide: $\frac{precio\,2003 - precio\,2001}{precio\,2001} \cdot 100\% = 5.6\%$.

Respuesta: El porcentaje de variación es de 5.6%.

Ejemplo 6

Dos inversiones que totalizan \$ 18000 producen un ingreso anual de \$ 700. Si la primera inversión tiene una tasa de interés de 5.5% y la segunda de 3.0%. ¿Cuál es el monto de cada una de las inversiones?

Solución:

Llamamos x = al monto de la primera inversión e y = el monto de la segunda. Sabemos que el total es: $x + y = 18000$. Además que la primera produce anualmente: $0.055x$ y la segunda:

$0.03\,x$. Todo esto nos lleva al sistema: $\begin{cases} x + y = 18\ 000 \\ 0.055\,x + 0.03\,y = 700 \end{cases}$ cuya solución matemática es: $(x\,,\ y) = (6400\ ,\ 11600)$ y la solución del problema es:

Respuesta: Las inversiones son de \$ 6400 y \$ 11600 respectivamente.

Ejemplo 7

Un carro hace en dos horas un viaje de ida y vuelta a una ciudad que dista a 72 *Km*. Si la velocidad promedio en el viaje de regreso es de 30 *Km/h* menor que en el viaje de ida. ¿Cuál es la velocidad promedio del carro al ir a la ciudad?

Solución:

Sea *v* = velocidad promedio de ir a la ciudad y *t* = tiempo empleado para llegar a la ciudad. Con esta elección de incógnitas tenemos $v \cdot t = 72$ (la distancia es igual a la velocidad por el tiempo). Además sabemos que la velocidad de regreso fue $v - 30$ y que el tiempo requerido para dicho viaje fue $2 - t$.
Como la distancia recorrida al regresar fue de 72 *Km,* podemos escribir que $(v-30)\,(2-t) = 72$, como deseamos obtener v eliminamos t y nos queda: $(v - 30)\left(2 - \dfrac{72}{v}\right) = 72$, de donde obtenemos la ecuación de segundo grado: $v^2 - 102\,v + 1080 = 0$, cuyas soluciones matemáticas son: $v_1 = 90$ y $v_2 = 12$.
Veamos cual de las dos raíces matemáticas es solución del problema. La raíz $v_2 = 12$ no puede ser solución, por que la velocidad de retorno, que es 30 *Km/h* menor que la de ida, sería negativa. Por lo tanto la solución es $v_1 = 90$ *Km/h*. Queda para el lector verificar que efectivamente cumple las condiciones del problema.

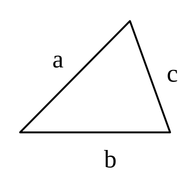
Respuesta La velocidad promedio es de 90 *Km /h*

Ejemplo 8

Un triángulo tiene perímetro de 37*cm.* El lado mayor tiene 3 *cm* más que el que le sigue en longitud, el cuál a su vez tiene 8 *cm* más que el lado más corto. Hallar las longitudes de cada lado en metros.

Solución:

Primero construimos una figura que nos ayuda a visualizar e interpretar el problema.
Sea a = longitud del lado mayor, b = lado siguiente y c = lado más corto.
Puesto que el perímetro es 37 *cm*, tenemos que : $a + b + c = 37$.



Por otro lado las condiciones del problema nos llevan a las siguientes ecuaciones: $a = b + 3$ y $b = c + 8$, de donde obtenemos:

$\begin{cases} a + b + c = 37 \\ a - b = 3 \\ b - c = 8 \end{cases}$ sumando la primera con la tercera reducimos el sistema a: $\begin{cases} a + 2b = 45 \\ a - b = 3 \end{cases}$,

restando miembro a miembro nos queda $b = 14$, reemplazando obtenemos $a = 17$ y $c = 6$.
Respuesta: Los lados del triángulo miden 0.17 *m*, 0.14 *m* y 0.06 *m*

EJERCICIOS

1.- Pasó un gavilán por un palomar y dijo: "Adiós palomar de 100 palomas". Una paloma le contesta: "Miente usted gavilán. Con éstas, otras tantas como éstas, la cuarta parte de éstas y usted gavilán, el ciento serán". ¿Cuántas palomas había?

2.- En un aula disponiendo 9 alumnos por banco quedan 3 alumnos sin asiento y disponiendo 10 por banco quedan 5 lugares vacíos. Encontrar el número de bancos y de alumnos.

3.- ¿Cuántos gramos de plata pura deben añadirse a 36 *grs* de plata al 60% para obtener una aleación de plata al 76%.

4.- Si considero 3 veces los años que tendré dentro de 3 años y le resto 3 veces los años que tenía hace 3 años resulta exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tengo?

5.- ¿Cuál es la longitud de una varilla si su quinta parte es roja, hay dos tercios pintados de blanco y restan aún dos metros por pintar?

6.- La diagonal de una granja cuadrada tiene 10 *km* más que uno de sus lados. ¿Cuál es la longitud del lado de la granja ?

7.- Un laboratorio químico tiene dos recipientes con soluciones diferentes. Uno contiene una solución al 10% de ácido nítrico (HNO_3) y el segundo al 30%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 25%?.

2.6 PRÁCTICO: LENGUAJE ALGEBRAICO Y ECUACIONES

Ejercicio 1: Decir si las siguientes igualdades son ecuaciones y en caso afirmativo encuentre sus raíces:

a) $3\ x+5=2\ x+10$

b) $4x^2-2x-3=3x^2-4x$

c) $x+\ 4=4(x-26)$

d) $3x^2-3x+7=3\left(x^2+2x\right)-9x+7$

Ejercicio 2: Resolver las siguientes ecuaciones y decir qué grado tienen:

a) $4x-1=2-4x$

b) $22x-7x-15/2=10-\left(\frac{7}{2}x-1\right)$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $\left(x^2-x+1\right)-(x+1)^2=3-\frac{3}{2}x$

e) $4x^2+12x+9=0$

f) $2x^2+x+9=(x+4)(x+1)$

Ejercicio 3: Responder con verdadero $\boxed{\text{V}}$ o falso $\boxed{\text{F}}$ a las siguientes proposiciones:

a)	$-2x=8$	$\rightarrow$	$x=-4$	....	
b)	$\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+1$	$\rightarrow$	$2x=3x+1$	....	
c)	$10\,x=7$	$\rightarrow$	$x=1/7$	....	
d)	$7\cdot x=0$	$\rightarrow$	$x=0$	....	
e)	El número cero no puede ser solución (raíz) de una ecuación				
f)	La ecuación $\frac{5}{x}=\frac{4}{x}$ no tiene solución				
g)	$x^2+2x+1=0$	$\rightarrow$	$x_1=x_2$	....	
h)	$3x^2+4x-3=0$	$\rightarrow$	No tiene solución real		
i)	$4x^2+12x+3=0$	$\rightarrow$	$x_1\neq x_2$	....	
j)	$-2x^2+3x+1=0$	$\rightarrow$	$x_1\neq x_2$	....	

Ejercicio 4: Despejar *x* en las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2a+x}{2a-x}=2$

b) $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{a+5}{a-5}\quad(a\neq 5)$

c) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{2x}+\dfrac{3}{2}=0$

d) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x+2}$

Ejercicio 5: Resolver y comprobar las soluciones (raíces) de las siguientes igualdades:

a) $x-\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)$

b) $\dfrac{3x+2}{8}=\dfrac{1-x}{5}$

c) $x-\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{3x}{4}+2$

d) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}=1$

f) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{3}{4x-5}=\dfrac{2}{3x}$

Ejercicio 6: Resolver, pero antes pensar si se puede simplificar las expresiones siguientes:

a) $\frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$

b) $\frac{3x^2 + 16x + 5}{2x + 10} = 1$

c) $\frac{2}{5}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$

d) $\frac{x^2 - 16}{8} = \frac{x^2 + 7x + 12}{16}$

Ejercicio 7: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar la solución obtenida en cada una de ellas. Además, decir que tipo de soluciones y grado tienen las ecuaciones.

a) $33 - 4x = -24 - 7x$

b) $2(x+3)(x-1) - (2x+3)(x+4) = 0$

c) $x^2 - x - 2 = 0$

d) $2(x+3) + 4(x+5) = 6$

e) $x + 12 = 15 + 4x - 2$

f) $4x^2 + 9 = 0$

g) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

h) $5x^2 + 10x = 75$

i) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x - 1) = 0$

j) $(x+5)^2 = 4$

Ejercicio 8: Hallar el valor de *a* de tal manera que la ecuación $\frac{x(1+a)}{a+1} + 1 = a - 1$, tenga como solución $x = 3/4$.

Ejercicio 9: Dada la ecuación: $x^2 - 10x + k = 0$. Hallar *k* y las raíces de la ecuación para los siguientes casos:

a) Una de las raíces es 7

b) Las dos raíces son iguales

Ejercicio 10: Dada la ecuación: $x^2 + ax + 14 = 0$, una de las raíces es 2. Hallar la otra raíz y el valor de *a*.

Ejercicio 11: ¿Para qué valor de *k* la ecuación: $kx^2 - 2kx + 1 = 0$ admite raíces reales iguales? Luego, encontrar las raíces de la ecuación.

Ejercicio 12: Averiguar para que valor de *k* las ecuaciones cuadráticas tiene las raíces indicadas.

a) $x^2 + 24 = kx - 1$ si $x_1 = x_2 = 5$

b) $x^2 + kx - 15 = 0$ si $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$

c) $3x^2 + 2x - k = 0$ si $x_1 = -1$ y $x_2 = 1/3$

Ejercicio 13: Escribir la ecuación de segundo grado, si x_1 y x_2 son sus raíces.

Ejercicio 14: La ecuación cuadrática se distingue por tener el término x^2, entonces

a) Si $a = 0$ ¿existe la ecuación de segundo grado?

b) Si $a \neq 0$ y $b = c = 0$, es decir, $ax^2 = 0$. ¿Es una ecuación de segundo grado?

Justificar las respuestas en cada ítem.

Ejercicio 15: Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **b)** $2x^2 - 4x + 1 = 0$ **c)** $x^2 + 2x + 6 = 0$

Ejercicio 16: a) Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son números opuestos a las de la ecuación $3x^2 - 10x + 2 = 0$ sin resolverla. b) Dada la ecuación: $x^2 - 10x + k = 0$. Hallar k y las raíces de la ecuación, si una de ellas es la inversa de la otra.

Ejercicio 17: Escribir la ecuación de segundo grado conocidas sus raíces:

a) raíces reales iguales a 1
b) raíces reales distintas: 3 y –3
c) raíces reales distintas: - 2 y 4

Ejercicio 18: Resolver los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ x - y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 4x - 1 = y \\ 2x - y = 10 - 2x \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4y = 5 + 2x \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 1 \\ 3y - x = -2 \end{cases}$

Ejercicio 19: Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x = 2[y - (x - y)] \\ x + [x - (x - y)] = 63 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{21}{x} - \dfrac{10}{y} = 5 \end{cases}$

Ejercicio 20: Hallar el valor de k para que el sistema tenga la solución indicada.

a) $\begin{cases} x - 16ky + 5 = 0 \\ 2kx + y = 2 \end{cases}$ $(x_o, y_o) = (1, 1.5)$ **b)** $\begin{cases} 10x + 5ky = -9 \\ x + 2y = 50k \end{cases}$ $(x_o, y_o) = (-1, 2.5)$

Ejercicio 21: Hallar dos números naturales pares consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 100.

Ejercicio 22: Los lados de un rectángulo miden 1 y 2 *m*. ¿Es posible aumentar ambos lados con una misma cantidad para que el área se duplique?

Ejercicio 23: En un rombo de 8*m* de perímetro, una de las diagonales mide el doble de la otra. ¿Cuánto mide su área en centímetros cuadrados?

Ejercicio 24: ¿Cuál es el número cuyo triple supera en 2 a su cuadrado?

Ejercicio 25: La suma de tres corrientes es de 12*A* (Amperes). Si la más pequeña es de 2*A* menos que la siguiente, la que a su vez es 2*A* menos que la mayor. ¿Cuáles son los valores de las tres corrientes?

Ejercicio 26: La corriente eléctrica en una resistencia es tres veces mayor que en otra resistencia. Si la suma de las corrientes es de 0.012*A*. Si el voltaje es constante, ¿cuál es la corriente en cada una de ellas?

Ejercicio 27: A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La contestación fue compleja: tomad 5 veces los años que tenía hace de 3 años, restadle 3 veces los años que tendré dentro 3 años y resultará los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene?

Ejercicio 28: Calcular cuánto miden los lados de una granja rectangular cuyo contorno es de 2100 centímetros y su superficie es de 26 metros cuadrados.

Ejercicio 29: Un hombre que rema a ***v*** *Km/h* cubre 8 *Km* en una hora cuando va a favor de la corriente. Remando dos veces más rápido cuando va en contra de la corriente, puede cubrir solamente 7 *Km* en una hora. Hallar la velocidad original a la que remaba y la velocidad de la corriente.

Ejercicio 30: En cierto circuito eléctrico hay una resistencia *R* de 2Ω y un voltaje *E* de 60 *V***.** La relación entre la corriente *i* (en Amperes), *E* y *R* está dada por la expresión: $i^2 R + i\,E = 800$. ¿Qué corriente i ($i > 0$) fluye por el circuito?

Ejercicio 31: En electrónica la resistencia equivalente a la de dos resistencias conectadas en paralelo está dada por: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Dos resistencias conectadas en serie está dada por: $R = R_1 + R_2$. Si dos resistencias conectadas en paralelo tienen una resistencia equivalente 3Ω y ellas mismas en serie una resistencia equivalente a 16Ω. ¿Cuáles son las resistencias?

Ejercicio 32: Si en una fracción al numerador se la suma 2, la fracción que se obtiene es igual a $\frac{1}{2}$. Por otro lado, si al denominador se le suma 1, la fracción que queda es igual $\frac{1}{3}$. Encontrar la fracción.

Ejercicio 33: La suma de dos números enteros es igual a 100. Si dividimos uno por el otro. El cociente nos da 3 y el resto es 8. ¿Puedes encontrar dichos números?

Ejercicio 34: Juan para ingresar a la universidad debe rendir un examen tipo "test" que consta de 20 preguntas. Por cada respuesta correcta obtiene 0.5 puntos y por cada respuesta incorrecta o no contestada se le resta 0.25. Si luego de corregida la prueba obtuvo 7 puntos, calcula cuántas respuestas correctas tuvo.

Ejercicio 35: Una máquina tiene una pieza rectangular cuya longitud es de 4 *mm* mayor que su ancho. Si el área de dicha pieza es de 96 mm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza?

Ejercicio 36: Considerando la ecuación de segundo grado $3x^2 = 5(6x - 15)$ ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

A) La ecuación no tiene raíces reales.

B) $x = \frac{5}{2}$ *y* $x = 0$ son las raíces.

C) Las raíces son $x = 5 + \sqrt{2}$ *y* $x = 5 - \sqrt{2}$

D) $x = 5$ es raíz doble.

Ejercicio 37: Dado el sistema $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$. ¿Cuál de los pares siguientes, es solución del sistema?

A) $(x, y) = (1, 3)$ **B)** $(x, y) = (0, -1)$ **C)** $(x, y) = (3, -1)$ **D)** $(x, y) = (-1, 0)$

Ejercicio 38: La edad de Gabriel es la tercera parte de la edad de Pedro. Dentro de 15 años, la edad de Pedro será el doble de la de Gabriel disminuida en 3 años. De los siguientes sistema de ecuaciones, ¿Cuál utilizarías para calcular las edades de Gabriel y Pedro?

A) $\begin{cases} 3\,G = 3P \\ P = (2G + 15) - 3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} G = \frac{P}{3} \\ P + 15 = 2(G + 15) - 3 \end{cases}$

C) $\begin{cases} G = 3P \\ P + 3 = 2G + 15 \end{cases}$ **D)** $\begin{cases} G = \dfrac{1}{3}P \\ P - 15 = 2(G - 15) + 3 \end{cases}$

Ejercicio 39: a) La pureza del oro se mide en quilates, el oro puro es de 24 quilates. Otras purezas se expresan como partes proporcionales de oro puro. Así, oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$, o 75% de oro puro; oro de 12 quilates es 50% de oro puro, y así sucesivamente. ¿Cuánto oro de 12 quilates debe ser mezclado, si es posible, con oro puro para obtener 60 gramos de 16 quilates?

Ejercicio 40: Sabiendo hay que un polígono convexo que tiene tantas diagonales como lados, hallar el número de lados del polígono. Hacer un dibujo y verificar lo que obtuvo. (Ayuda: El número de diagonales de un polígono convexo de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$) .

Ejercicio 41: Sea un triángulo equilátero de lado x, y un rectángulo de altura 3m cuya base está apoyada sobre uno de los lados del triángulo; además se sabe que tienen igual perímetro. Calcular el área del rectángulo en centímetros.

Ejercicio 42: ¿Qué círculo duplica su área al aumentar su radio en 3 *cm*?

Ejercicio 43: Una vendedora comenta que no importa si vende un par de zapatos a $31 o dos pares a $49, porque la ganancia resulta igual en cada venta. ¿Cuánto le cuesta un par de zapatos a la vendedora y cuál es su ganancia?

Ejercicio 44: En una tribu india utilizan conchas como monedas. Sabemos que tres espejos y dos arcos cuestan 78 conchas y que cuatro espejos y un arco 54 conchas. ¿Cómo averiguar cuántas conchas hay que dar por cada arco.

Ejercicio 45: ¿Quedan determinadas las dimensiones de un terreno rectangular sabiendo que su perímetro es de 300 *m*? ¿Y si además se sabe que el largo excede al ancho en 20 *m*?

Ejercicio 46: La edad de un padre es el doble de la edad de su hijo, pero hace 18 años la quintuplicaba. Hallar las edades actuales del padre e hijo.

Ejercicio 47: Varias personas deben pagar solidariamente en partes iguales la suma de $108000. Dos de ellas resultan insolventes y esto hace que la deuda de cada una de las restantes aumente en $ 9000. Hallar el número de deudores.

Ejercicio 48: Dos grifos tardan en llenar un depósito de agua 3 horas. Sabiendo que el segundo tarda 8 horas más que el primero en llenar solo el depósito, hallar las horas que tarda cada uno de los grifos en llenar el depósito de agua.

Ejercicio 49: Victoria, Graciela e Irma deben repartirse $ 335 ahorrados para el viaje de fin de año, de modo que Victoria recibe $25 más que Graciela, y Graciela $5 más que Irma. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

Ejercicio 50: Un competidor de una maratón el primer día avanza $\frac{1}{3}$ del circuito, el segundo día $\frac{2}{5}$ y el tercer día avanza 16 *Km* para llegar al punto de partida. Hallar el kilometraje del circuito.

Ejercicio 51: Un hombre que va por la calle se encuentra con varios mendigos. Lleva cierta cantidad de monedas y las quiere repartir en partes iguales. Dando a cada mendigo 25 centavos le faltan 10 centavos, y repartiendo a razón de 20 centavos por mendigo le sobran 25 centavos. Encuentra el número de mendigos y la cantidad de dinero que repartió.

Ejercicio 52: La diferencia de dos números menos 1 es igual al menor y la suma más 22 es igual al doble del mayor. Hallar dichos números.

Ejercicio 53: Un avión, para ir de la ciudad de San Luis a la ciudad de Córdoba (la distancia en línea recta es aproximadamente 594*Km*) tarda 54 minutos y para volver tarda 66 minutos. Suponiendo que el viento sopla con velocidad constante en la dirección y sentido de San Luis a Córdoba. Encuentra la velocidad del avión en el supuesto que no sopla viento alguno y la velocidad del viento en los vuelos expuestos.

Ejercicio 54: Un grifo llena un depósito en dos horas. En el momento de llenarse, y sin cerrar el grifo, se abre un desagüe que vacía el depósito en cuatro horas. ¿En cuánto tiempo se vaciaría el depósito si se cerrara la fuente?

Ejercicio 55: Un laboratorio químico tiene dos recipientes con soluciones diferentes. Uno contiene una solución al 10% de ácido nítrico (HNO_3) y el segundo al 30%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 25%?.