CAPÍTULO

3 Expresiones Algebraicas

*En España, donde la influencia árabe fue muy importante, surgió el término **álgebra**, se utilizó para referirse al arte de restituir a su lugar los huesos dislocados y por ello, el término algebrista hacía referencia a la persona que sabía arreglar las dislocaciones (en El Quijote podemos encontrar estos términos en muchos de sus capítulos).*

*El libro **Kitab al-jabr wa al-muqabalah**, fue la obra más importante del matemático árabe **Al-Khowarizmi**, parte de su título dio nombre a toda una disciplina matemática: **el álgebra**. Al-jabr quiere decir algo así como "restitución", que es lo que se intenta hacer cuando se resuelve una ecuación, restituir el valor de la incógnita.*

Con el álgebra pasamos del número al símbolo, de lo particular a lo general. La gran expresividad del lenguaje algebraico facilita la obtención de relaciones, propiedades y la resolución de problemas.

Para trabajar eficazmente en matemáticas debemos operar convenientemente con expresiones algebraicas, de modo que se transformen las expresiones en otras idénticas, pero más fáciles de manejar.

En este capítulo:

- *Adquiriremos destrezas para conseguir identidades que resulten más convenientes.*
- *Recordaremos las identidades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, diferencia de cuadrados.*
- *Recordaremos las operaciones con polinomios.*
- *Aprenderemos que las regla de Ruffini no sólo sirve para dividir un polinomio por $x - a$, sino que también es útil para evaluar polinomios.*
- *Descompondremos los polinomios en factores cuando sus raíces sean enteras.*
- *Aprenderemos que una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios y que se comportan de forma similar a las fracciones numéricas.*
- *La ejercitación estará destinada a adquirir práctica en el manejo y comprensión de la factorización, de las operaciones con polinomios y de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.*

Repasemos algunos conceptos básicos:

Variables o indeterminadas: se llaman así las letras que se utilizan en los polinomios, usaremos fundamentalmente una x, si necesitamos más usaremos: *y, z, t*...
Constantes: son números o expresiones que representan números y acompañan a las variables, para ellas se usan las primeras letras del alfabeto: *a, b, c*...

Monomios son expresiones algebraicas en las que las variables están multiplicadas entre sí y/o por constantes.

Ejemplos: x^2y ; $\frac{1}{3}x^3$; $-\sqrt{5}xyz^2$; $2at^2$; $-5x$

La constante del monomio se llama ***coeficiente***; en los ejemplos anteriores, son coeficientes: 1, 1/3, $-\sqrt{5}$, 2*a*, -5, respectivamente. La, o las variables, de un monomio se la llama ***parte literal*** del monomio. El ***grado*** de un monomio está dado por el número de factores literales y se obtiene sumando los exponentes a los que están elevadas las variables; así:

x^2y	es de grado 3 o tercer grado
$\frac{1}{3}x^3$	es de tercer grado
$-\sqrt{5}xyz^2$	es de cuarto grado
$2at^2$	es de segundo grado
$-5x$	es de primer grado

Las *constantes son monomios de grado cero*, sea *k* cualquier constante, luego: $k = k.1 = kx^0$.

Dos monomios del mismo grado, con las mismas variables elevadas a las mismas potencias, son ***semejantes***

Así, los monomios $3x^2y^3$ y $-\frac{1}{2}x^2y^3$ son semejantes, también lo son $2x^5$ y ax^5 . No son semejantes a estos últimos ninguno de los anteriores, a pesar que todos tienen igual grado.
Es inmediato sumar o restar monomios semejantes:

$$2x^3 + 4x^3 = (2+4)x^3 = 6x^3 \qquad\qquad 7x^4 - 3x^4 = (7-3)x^4 = 4x^4$$

La suma de monomios ***no*** *semejantes*, por ejemplo: $5x + 3x^2$ *nunca* es otro *monomio*, en este caso particular la suma nos da un *binomio*.
Un *binomio* es la suma de dos monomios no semejantes, un *trinomio*, de tres y en general, un *polinomio* es la suma algebraica de cualquier número de monomios no semejantes (en particular, un monomio también es polinomio).

3.1 Polinomios

Ejemplos:

a) $3xy^2 - 2x^2y + y$ **b)** $x^5 + 3x^2 - 3x + 2$

En adelante, trabajaremos solamente con ***polinomios en una sola variable***, como el polinomio del ejemplo b). Este polinomio es suma de cuatro monomios no semejantes: x^5, $3x^2$, $-3x$ y 2. Los coeficientes de estos monomios, llamados también coeficientes del polinomio, son 1, 3, -3 y 2. Los grados de estos monomios son 5, 2, 1 y 0 respectivamente.
El ***grado del polinomio*** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En este caso el polinomio es de quinto grado.

En forma general:

Un ***polinomio en una variable real*** es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

donde $a_0, a_1, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ son constantes, llamadas *coeficientes del polinomio*, $n \geq 0$ es un número entero y x es la variable.

Si $a_n \neq 0$, es éste el ***coeficiente principal*** y n es el ***grado del polinomio***.
A los monomios sumandos de un polinomio se los llama *términos del polinomio.*

Algunos ejemplos:

$A(x) = 3x^2 + x - 1$; $B(x) = x^4 - 7x^3 + \frac{1}{2}x$; $C(x) = \pi x + \sqrt[3]{2}$; $D(x) = -28$;

$E(x) = 0$

A(x), *C(x)*, *D(x)* y *E(x)* son polinomios ***completos*** porque están *todas* las potencias decrecientes de *x. B(x)*, es un polinomio ***incompleto*** porque faltan los términos de segundo y de cero grado, *B(x)* se puede ***completar*** agregando los términos que faltan con coeficientes iguales a cero:

$$B(x) = x^4 - 7x^3 + 0x^2 + \frac{1}{2}x + 0$$

El polinomio *A(x)* es de segundo grado, los coeficientes son: 3, 1 y –1; y el coeficiente principal es 3. En *B(x)*, los coeficientes son 1, -7, 0, $\frac{1}{2}$, 0; el coeficiente principal es 1 y el polinomio es de cuarto grado, *C(x)* es un polinomio de primer grado, con coeficientes π, $\sqrt[3]{2}$ y el coeficiente principal es π, *D(x)* es un polinomio de grado cero, tiene un único coeficiente, que es también coeficiente principal: -28 y por último *E(x)* es el ***polinomio cero***, que es el único polinomio al cual no se le asigna grado, ya que no tiene ningún coeficiente distinto de cero, puesto que cero puede considerarse como:

$$0 = 0x + 0 = 0x^2 + 0x + 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = ...$$

Los ejemplos anteriores nos muestran el siguiente resultado general:

Todo polinomio de grado *n* tiene *n* + 1 coeficientes

3.2 Operaciones con polinomios

De aquí en adelante podremos observar la gran similitud que existe entre las operaciones con polinomios y las operaciones con números enteros.

3.2.1 Suma y resta

Para *sumar* dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes. A la *resta* de dos polinomios la transformamos en suma, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo: Sumar y restar los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad Q(x) = x^4 - x^3 + 3x - 5$$

La forma práctica de sumar o restar es ubicando los polinomios uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna:

Suma:

$$
\begin{array}{rl}
P(x) = & 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \\
Q(x) = & x^4 - x^3 \qquad\qquad + 3x - 5 \\
\hline
P(x)+Q(x) = & 4x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x - 4
\end{array}
$$

Resta:

$$
\begin{array}{rl}
P(x) = & 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \\
-Q(x) = & -x^4 + x^3 \qquad\qquad - 3x + 5 \\
\hline
P(x)-Q(x) = & 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x + 6
\end{array}
$$

EJERCICIOS

1.- Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 3$, $Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 11$ y $R(x) = 0$

Determinar: **a)** el grado de cada polinomio y sus respectivos coeficientes.
b) $S(x) = P(x) + Q(x)$
c) $T(x) = P(x) - Q(x)$
d) $U(x) = P(x) + R(x)$
e) el grado de $S(x)$, de $T(x)$ y de $U(x)$

2.- Calcular los valores de *a, b, c* y *d* para que se cumpla:

a) $\left(3x^2 - 4x^3 + 2x - 5\right) + \left(4 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4\right) = 5x^4 - 3x^2 + x - 9$

b) $\left(3x^2 - 6x^5 + 7x^3 - 7x\right) - \left(dx^5 + 7x^3 + cx^2 + bx + a\right) = 2x^2 - x + 3$

3.- Efectuar las operaciones indicadas y reducir la expresión resultante:

a) $3\left(x^3 - 5x + 7\right) - 4\left(x^3 + 5x^2 + 10x - 1\right)$ **b)** $8\left[\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - 1\right]$

3.2.2 Multiplicación

Necesitamos previamente repasar:

> El ***producto de dos monomios*** es otro ***monomio*** con coeficiente igual al producto de los coeficientes de los factores y el grado es suma de los grados de los factores

Ejemplos:

$$5x^3 \cdot \left(-2x^2\right) = -10x^5 \qquad\qquad \frac{3}{2}x \cdot 8x = 12x^2$$

En la **multiplicación de un polinomio por un monomio**, aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$\left(3x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5x - 2\right)\cdot\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{10}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2$$

Ahora si, estamos en condiciones de **multiplicar polinomios** y lo hacemos aplicando reiteradamente la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de uno por cada término del otro, así por ejemplo:

$$\left(2x^2 - x + 5\right)(x+2) = 2x^2(x+2) - x(x+2) + 5(x+2) =$$
$$= 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 5x + 10 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 10$$

Una manera práctica de realizar la multiplicación de polinomios, efectuando los cálculos de manera ordenada y segura, es la siguiente:

***Recuerda** dejar un espacio cuando falta el monomio de grado intermedio.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 2x^4 & - & 5x^3 & & & - & 2x & + & 3 \\
 & & & & \times & & & & x^2 & - & x & + & 2 \\
\hline
2x^6 & - & 5x^5 & & & - & 2x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
 & - & 2x^5 & + & 5x^4 & & & + & 2x^2 & - & 3x & & \\
 & & & & 4x^4 & - & 10x^3 & & & - & 4x & + & 6 \\
\hline
2x^6 & - & 7x^5 & + & 9x^4 & - & 12x^3 & + & 5x^2 & - & 7x & + & 6
\end{array}$$

3.2.3 Identidades Notables

Estas identidades son importantes, las encontramos frecuentemente en los cálculos, por ello, se acostumbra llamarlas notables

- **Cuadrado de un binomio**

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Cubo de un binomio**

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2 + 2ab + b^2\right)(a+b) = a^2(a+b) + 2ab(a+b) + b^2(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- **Suma por diferencia**

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Para recordar

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Las identidades notables son útiles en la factorización de polinomios, sirven para transformar una expresión algebraica en otra más sencilla, por ejemplo:

$$(x+3)^2-(x-1)^2=\left(x^2+6x+9\right)-\left(x^2-2x+1\right)=6x+9+2x-1=8x-8=8(x+1)$$

la expresión final $8(x+1)$ es mas sencilla que la dada inicialmente y es *idéntica* a ella, luego, podemos sustituir la primera expresión por la última y el cambio es ventajoso.

Más ejemplos:

- $x^2-12x+36=(x-6)^2$
- $\left(2ax^2+5\right)^3=8a^3x^6+60a^2x^4+150ax^2+125$
- $9x^6-\frac{1}{4}=\left(3x^3-\frac{1}{2}\right)\left(3x^3+\frac{1}{2}\right)$

EJERCICIOS

1.- Calcular:

a) $\left(x^2+x+1\right)(x-4)$ **b)** $\left(2x^3-x+1\right)\left(x^2+x-1\right)$ **c)** $\left(2x^3-3x^2+5x-2\right)\left(x^2-x-2\right)$

2.- Si el polinomio $A(x)$ es de tercer grado y $B(x)$ es de segundo grado, ¿cuál es el grado de $A(x)\cdot B(x)$?-

3.- Completar la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{rrrr}
 & __\,x^2 + & __\,x & + __ \\
 & & x & -__ \\
\hline
 & __\,x^2 & -\;14x & -\;__ \\
__\,x^3 & +\;7x^2 & +\;__\,x & \\
\hline
2x^3 & +\;3x^2 & -\;8x & -\;12
\end{array}$$

4.- Desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** $(3x-2)\,(3x+2)$

d) $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ **e)** $\left(x^2+25\right)\left(x^2-25\right)$ **f)** $\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}\right)^2$

5.- Factorear (es decir, expresar como producto):

a) x^2-6x+9 **b)** $16x^2-49$ **c)** x^2-3

d) x^3-3x^2+3x-1 **e)** $\frac{4}{25}-x^2$ **f)** $\frac{1}{4}+x+x^2$

3.2.4 División

Comenzamos dividiendo monomios:

> El ***cociente*** de dos ***monomios***, uno de grado *m* y otro de grado *n*, con $m \geq n$, es otro ***monomio***, cuyo grado es la diferencia de los grados y el coeficiente se obtiene dividiendo los coeficientes de los monomios dados, es decir:
>
> $$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

Ejemplos:

$3x^6 : 2x^2 = \frac{3}{2}x^4$ $\qquad$ $\left(-8x^4\right): 4x^3 = -2x$ $\qquad$ $\left(-3x^5\right): \left(-\frac{3}{2}x^5\right) = 2$

Recordemos como se procede en la ***división de dos polinomios*** realizando un ejemplo.

Ejemplo 1 Dividir:

$$P(x) = 2x^3 - x + 5x^4 + 1 \quad \text{por} \quad Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

para ello ubicamos los polinomios como sigue:

$$\begin{array}{l|l}
5x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2}
-5x^4 + 10x^3 + 15x^2 & \underbrace{5x^2 + 12x + 39}_{cociente} \\ \cline{1-1}
\qquad 12x^3 + 15x^2 - x & \\
\quad -12x^3 + 24x^2 + 36x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 39x^2 + 35x + 1 & \\
\qquad\quad -39x^2 + 78x + 117 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad \underbrace{113x + 118}_{resto} &
\end{array}$$

Pasos realizados

1. Ordenamos según las potencias decrecientes el dividendo y el divisor. Completamos el dividendo.

2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor:
$$5\,x^4 \div x^2 = 5\,x^2$$

3. El producto de $5x^2$ por $Q(x)$ (divisor), se coloca bajo el dividendo y se resta.

4. El primer resto parcial es $12x^3 + 15x^2$, bajamos el término: $-x$, a partir de aquí procedemos a repetir lo realizado en 2 y 3.

5. Detenemos el proceso cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor. En nuestro ejemplo tenemos:
$$C(x) = 5x^2 + 12x + 39 \quad y \quad R(x) = 113x + 118$$

En la división anterior, hemos dividido dos polinomios: el dividendo $P(x)$ y el divisor $Q(x)$, obteniendo dos polinomios: el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$. Luego, aplicando la definición de cociente, tenemos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \qquad \text{de donde} \qquad P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

o bien, dividiendo ambos miembros de la igualdad anterior por $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una cuestión importante para recordar es que el resto $R(x)$, es un polinomio de grado menor que el grado del divisor $Q(x)$, o es cero. Según esto, *el resultado de la división en general* ***no*** *es un polinomio.* Veamos esta afirmación aplicandolá en el Ejemplo 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^4 + 2x^3 - x + 1}{x^2 - 2x - 3} = 5x^2 + 12x + 39 + \frac{113x + 118}{x^2 - 2x - 3} \qquad (1)$$

Observando la expresión (1), vemos que el grado del cociente es la diferencia de los grados del numerador y del denominador, el grado del resto es menor que el del denominador. El último término es una expresión racional que se suma al cociente, luego (1) **no** es un polinomio.
A la división entre polinomios, se le llama ***división entera****,* cuando el resto es distinto de cero.
Cuando el resto es cero, la ***división es exacta****.*

La siguiente es una división exacta

$$\left(6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8\right) : \left(3x^2 + 2\right)$$

el cociente es el polinomio $2x^3 + x - 4$ y es resto es cero, por lo tanto

$$\frac{6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8}{3x^2 + 2} = 2x^3 + x - 4$$

Podemos afirmar que:

Cuando la división es exacta, el cociente ***es un polinomio***

EJERCICIOS

1.- En una división de polinomios, el dividendo es de cuarto grado y el divisor de segundo grado.
a) ¿Cuál es el grado del cociente?. **b)** ¿Qué puede decir del grado del resto?.

2.- Calcular las siguientes divisiones

a) $\frac{5x + 7}{5x}$ **b)** $\frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 1}$ **c)** $\frac{5x^2 - 4}{x + 1}$

d) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x + 1}$ **e)** $\frac{2x^3 - x + 14}{x + 2}$

3.- ¿Cuánto deben valer m y n para que la siguiente división:

$$\left(x^4 - x^3 + 5x^2 + m\,x + n\right) \div \left(x^2 + 3x - 1\right)$$

a) sea exacta?. **b)** tenga resto $\frac{1}{2}x - 3$?

3.2.4.1 División de un polinomio por $x - a$

Los polinomios, en similitud con los números enteros, se pueden descomponer en producto de factores, luego, cada uno de esos factores divide al polinomio exactamente. El problema que se nos presenta es determinar esos factores, es decir:

Tenemos el polinomio $P(x)$; ¿Existirá algún polinomio distinto de él mismo y de 1 tal que pueda dividirlo de modo que la división sea exacta?

Esta pregunta es difícil de responder en el caso general. Comenzaremos la búsqueda de esos divisores considerando polinomios especialmente simples, como son los de la forma $x - a$. Para efectuar divisiones de este tipo disponemos de un recurso práctico y cómodo conocido como la:

3.2.4.2 Regla de Ruffini

La recordamos aplicándola en una división:

Ejemplo 1: Dividir el polinomio $3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ por $x - 2$ usando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -2 & 0 & 5 & -1 \\
2 & & 6 & 8 & 16 & 42 \\
\hline
 & \underbrace{3 \quad\; 4 \quad\; 8 \quad\; 21}_{\text{Coeficientes del cociente}} & & & & \boxed{41}\ \text{Resto}
\end{array}$$

Los pasos seguidos son los siguientes:

1. En la primera fila del cuadro anterior se colocan los coeficientes del polinomio completo y ordenado según las potencias decrecientes de *x*.

2. En la segunda fila, a la izquierda se escribe *a*, en este caso, 2

3. En la tercer fila, se baja el coeficiente del término de mayor grado: 3 (éste será el coeficiente del 1º término del cociente).

4. Los otros números de la 2º y 3º fila se van obteniendo de la siguiente manera: multiplicamos, $2 \cdot 3 = 6$ que va debajo del coeficiente del 2º término y en la 2º fila y luego se suman, es decir, $(-2) + 2 \cdot 3 = 4$. Así obtenemos el 2º coeficiente del cociente, ubicado en la 3º fila.

5. Reiteramos el proceso: $\begin{cases} 2 \cdot 4 + 0 = 8 \\ 2 \cdot 8 + 5 = 21 \\ 2 \cdot 21 + (-1) = 41 \end{cases}$ hasta terminar.

6. Este último número: 41, es el resto de la división (naturalmente nos tenía que dar un número porque el resto es siempre de menor grado que el divisor, por lo tanto, en nuestro caso el grado del resto debe ser 0.

7. Ahora podemos armar el resultado de la división, el grado de éste es una unidad menor que el grado del dividendo puesto que estamos dividiendo por un polinomio de 1º grado: por lo que el cociente es: $C(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21$ y $r = 41$

Observación: La Regla de Ruffini la podemos aplicar ***sólo*** cuando dividimos un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, el cociente $C(x)$ obtenido, es un polinomio de grado menor en una unidad al de $P(x)$ y el resto ***r*** es una constante.

Al dividendo de la división podemos escribirlo así:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 21) + 41$$

dividiendo ambos miembros de la expresión anterior por $(x-2)$, podemos expresar el cociente:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x - 1}{x-2} = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21 + \frac{41}{x-2}$$

observamos que el cociente anterior no es un polinomio

En una división exacta el último término no aparece porque el resto es cero, entonces, en este caso, el cociente nos da un polinomio.

Veamos el caso donde la división es exacta:

Ejemplo 2: $(x^3 + 4x^2 + 16x + 39) \div (x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 16 & 39 \\ -3 & & -3 & -3 & -39 \\ \hline & 1 & 1 & 13 & \boxed{0} \end{array}$$

$C(x) = x^2 + x + 13$ $r = 0$

Analizando los coeficientes obtenidos podemos extraer otras consecuencias importantes:

Observamos que para que la división sea exacta deben ser iguales y de signos opuestos, el término independiente del dividendo, 39 y el producto $(-3) \cdot 13 = -39$.
Esto es: 39 es *múltiplo* de (-3).
Luego, podemos enunciar, algo parecido a un criterio de divisibilidad de polinomios:

> Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por $x - a$ **es necesario** que su término independiente sea ***múltiplo*** de $\underline{a}$