GEOMETRÍA DEL ESPACIO

DEFINICIONES – PROPIEDADES
(ENUNCIADOS)

Prof. Etda Rodríguez
Octubre – 2005
Montevideo – Uruguay

NOTA AL LECTOR:

El siguiente trabajo es simplemente la compilación de enunciados de algunas definiciones y propiedades de una GEOMETRÍA EUCLIDIANA del ESPACIO.

No se trata de la presentación de un desarrollo lógico deductivo del tema. En consecuencia no se desarrolla la demostración de ningún teorema.

En los apéndices I y II se presenta, a modo de ejemplo, un sistema axiomático para una Geometría Euclidiana Plana y también un sistema axiomático para una Geometría Euclidiana del Espacio, con sus conceptos primitivos y los respectivos conjuntos de axiomas.

La primera y segunda edición, en noviembre de 1999 y mayo de 2001 respectivamente, fueron publicadas como material de apoyo para los asistentes a los "Cursos de Actualización y Sensibilización para Docentes con Plan 1996". En febrero de 2005, presentamos una 3ª edición revisada y ampliada, la que fue distribuida entre docentes de los Institutos Magisteriales.

Este trabajo no fue pensado para ser entregado a los alumnos de Enseñanza Media.

Nuestra intención es brindar a los estudiantes de Profesorado y a los docentes de Ciclo Básico un material de fácil consulta, complementario al soporte teórico de la mayoría de los temas de Geometría del Espacio que se trabajan a lo largo de ese Ciclo de la Enseñanza Media.

La presente edición ha sido revisada y en parte ampliada con respecto a las anteriores. Así, por ejemplo, en el Apéndice III se agregan algunas definiciones relacionadas con polígonos y poliedros.

Prof. Etda Rodríguez
4ª Edición – Octubre 2005

CONCEPTOS PRIMITIVOS y RELACIONES de PERTENENCIA

1) Existe un conjunto E llamado **ESPACIO**, al que pertenecen infinitos elementos llamados **PUNTOS**.

2) ***Existen infinitos*** **PLANOS** incluidos en el Espacio E.

3) Dado un plano α***, existen puntos en*** E ***que no pertenecen al*** α. Es decir los planos son subconjuntos estrictos del espacio.

4) A los planos pertenecen ***infinitos puntos***.

5) ***Existen infinitas*** **RECTAS** incluidas en cada plano.

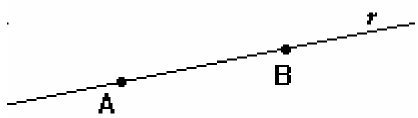
6) Dada una recta ***r*** incluida en un plano α, existen en α puntos que no pertenecen a la recta ***r***. Es decir las ***rectas son subconjuntos estrictos de cada plano.***

7) ***A las rectas pertenecen infinitos puntos***.

DETERMINACIÓN de RECTAS

8) **Determinación de una recta**: Dados ***dos puntos distintos, existe y es única*** la ***recta*** a la cual pertenecen.
Usualmente se enuncia: "Dos puntos distintos ***determinan***[1] una recta que pasa por ellos".

A $\in$ ***r***
B $\in$ ***r***



Notación: $\overline{AB}$ se lee: "la recta que A y B determinan" o "simplemente la recta AB".

9) Definición (1): Llamamos **figura** a cualquier conjunto de puntos de E. (Las figuras no tienen porque ser sólo figuras planas. Por ejemplo los poliedros, los cilindros y las esferas también son figuras.)

10) Definición (2): Se dice que un conjunto de puntos están **alineados** si todos pertenecen a una misma recta.

DETERMINACIÓN de PLANOS

11) Determinación de un plano (1): Dados ***tres puntos no alineados, existe y es único*** el ***plano*** al cual pertenecen.

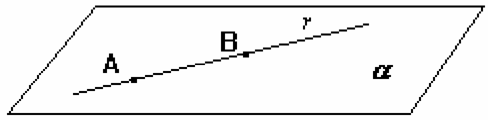
Usualmente se enuncia: "Tres puntos no alineados determinan un plano.

Notación: (ABC) se lee: "el plano que A, B y C determinan" o "el plano ABC ".

[1] "Determinan" significa que existe y es única.

12) ***Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, dicha recta <u>está incluida en ese plano</u>.***

(H) A , B $\in \alpha$
A , B $\in$ $\boldsymbol{r}$
A $\neq$ B



(T) $\boldsymbol{r} \subset \alpha$

13) Definición (3): <u>Dos rectas se llaman **secantes**</u> si tienen uno y sólo un punto común.

FIGURAS COPLANARES

14) Definición (4): Se dice que un conjunto de puntos, rectas u otras figuras **<u>son coplanares</u>** si están incluidos en un mismo plano.

RECTAS PARALELAS

15) Definición (5): Se dice que dos rectas son **<u>paralelas</u>** si **<u>son coplanares y no son secantes.</u>** Es decir dos rectas paralelas pueden ser ***coincidentes*** o ser ***coplanares disjuntas***, es decir, coplanares sin ningún punto común.

16) <u>Axioma de Euclides o de Paralelismo</u>: Por un punto exterior a una recta, ***<u>existe</u>*** y ***<u>es única</u>*** la ***<u>paralela</u>*** a una recta dada.

DETERMINACIÓN de PLANOS

17) <u>Determinación de un plano (2):</u> Dada *<u>una recta y un punto que no le pertenece</u>* <u>(un punto exterior)</u>, existe y es único el *<u>plano</u>* que pasando por el punto incluye a la recta.

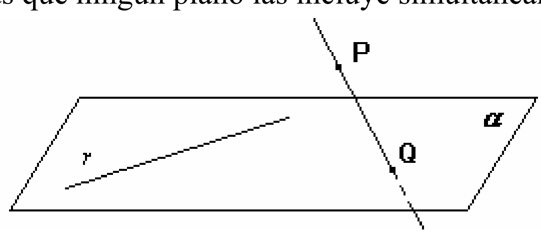
18) <u>Determinación de un plano (3):</u> Dadas *<u>dos rectas secantes</u>*, existe y es único el *<u>plano</u>* que las incluye.

19) <u>Determinación de un plano (4):</u> Dadas *<u>dos rectas paralelas disjuntas</u>*, existe y es único el *<u>plano</u>* que las incluye.

RECTAS que se CRUZAN

20) Existen pares de rectas que ningún plano las incluye simultáneamente.

P $\notin \alpha$
Q $\in \alpha$
$\boldsymbol{r} \subset \alpha$
Q $\notin \boldsymbol{r}$



Las rectas $\boldsymbol{r}$ y PQ no son coplanares

21) Definición (6): Se dice que **<u>dos rectas se cruzan</u>** si no existe algún plano que las incluya simultáneamente, es decir cuando **<u>no son coplanares</u>**.

22) Si una recta es secante a un plano, entonces se cruza con todas las rectas de ese plano que no pasan por el punto de intersección**.**

INTERSECCIÓN de PLANOS

23) Si dos planos distintos tienen <u>dos puntos comunes</u>, su intersección es <u>la recta</u> que esos dos puntos determinan. Pero es suficiente que dos planos <u>distintos</u> tengan <u>un punto común</u>, para poder afirmar que su intersección es una recta a la que pertenece ese punto.

24) Definición (7): Lamamos **<u>haz de planos de eje la recta *r*</u>** al conjunto de los infinitos planos que incluyen a la recta ***r***.

ORDEN en la RECTA

25) **<u>Propiedad del orden en la recta</u>**: La relación ***"preceder"*** definida en el conjunto de los puntos de una recta es una relación de ***<u>orden total</u>***.

Es decir la relación ***preceder*** cumple las propiedades:

i) ***Tricotomía***: Dados dos puntos A y B de una recta, se cumple: A *"precede a"* B o B *"precede a"* A o A es B.

ii) ***Transitiva***: si tres puntos A, B y C de una recta cumplen que si A *"precede a"* B y B *"precede a"* C, entonces A *"precede a"* C.

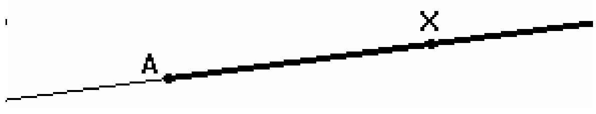
Observación: los puntos de cada recta pueden ser ordenados en dos sentidos opuestos.

26) Las rectas no tienen ni primer ni último punto, es decir ***las rectas son conjuntos abiertos.***

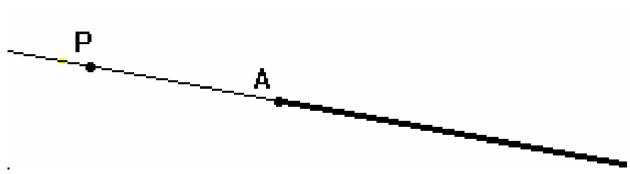
27) Dados dos puntos cualesquiera de una recta, ***entre ambos existe otro punto de esa recta.*** Es decir ***las rectas son conjuntos densos.***

SEMIRRECTA

28) Definición (8): Una **<u>semirrecta</u>** es un conjunto formado por un punto de una recta y todos los puntos de dicha recta que le siguen - o que le preceden.



Notación: $\overset{\longmapsto}{AX}$ se lee: "semirrecta de origen A que pasa por X" o "semirrecta AX".



Notación: op $\overset{\longmapsto}{AP}$ se lee: "semirrecta opuesta a la $\overset{\longmapsto}{AP}$".

SEGMENTO

29) Definición (9): Un **<u>segmento</u>** es el conjunto formado por dos puntos de una recta y los puntos de esta recta que están entre ambos.

Notación: $\overline{AB}$ se lee: "segmento AB"
"segmento de extremos A y B"

ORDEN en el PLANO

30) **<u>Partición del plano por una recta</u>**: Toda recta ***r*** de un plano α clasifica a los puntos de α que no pertenecen a ***r*** en dos conjuntos φ y φ* que cumplen:

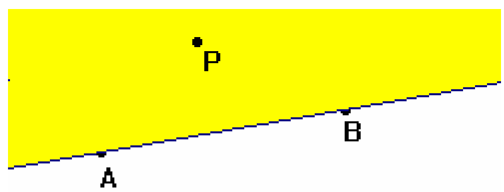
i) { ***r*** , φ , φ* } es ***<u>una partición</u>*** de α. Es decir: los conjuntos r , φ y φ*, no son vacíos, son disjuntos dos a dos y la unión de todos es el plano α.

ii) El segmento determinado por un punto de φ y un punto de φ* tiene un punto y sólo uno en ***r***.

iii) El segmento determinado por dos puntos de φ , o por dos puntos de φ*, no tiene ningún punto en ***r***. Se puede sustituir esta afirmación diciendo que φ y φ* son figuras convexas [2].

SEMIPLANO

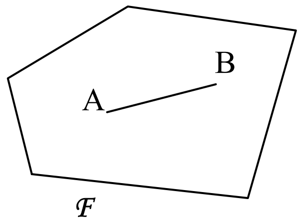
31) Definición (10): Dada una recta ***r*** incluida en un plano α , un **<u>semiplano</u>** de borde la recta ***r*** , es el conjunto formado por los puntos de esta recta y todos los puntos de una de las dos regiones que, según la proposición anterior, la recta ***r*** determina en α. Cada uno de los conjuntos φ y φ* es un ***semiplano abierto*** de borde ***r***.

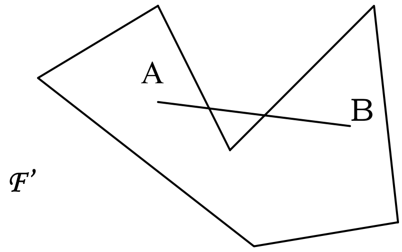


Notación: • ***r***, P se lee: "semiplano ***r***, P "
o "semiplano de borde ***r*** al que pertenece P "
• AB, P se lee: "semiplano de borde AB al que pertenece P "

[2] Ver la proposición 32.

32) Definición (11): Se dice que una **figura es convexa** si en ella está incluido el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la misma.



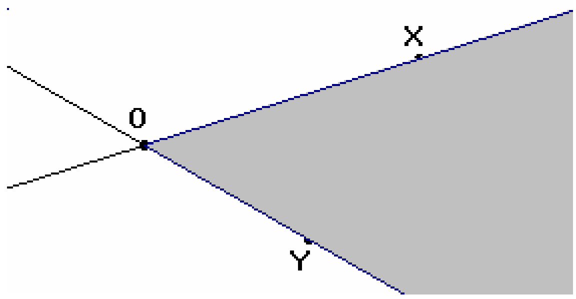


F es convexa   *F'* no es convexa

ÁNGULO CONVEXO

33) Definición (12): Dadas dos semirrectas de origen común OX y OY , **el ángulo convexo XOY** es la intersección de dos semiplanos, el de borde la recta OX que incluye a la semirrecta OY, con el de borde la recta OY que incluye a semirrecta OX. Los ***lados del ángulo*** son las dos semirrectas de origen común y el ***vértice del ángulo*** es dicho origen.

áng. $XOY = OX,Y \cap OY,X$



TRIÁNGULO

34) Definición (13): Dados tres puntos A, B y C no alineados, llamamos **triángulo** ABC a la intersección de tres semiplanos, los que tienen por bordes las rectas determinadas por cada dos de estos puntos y al que pertenezca el tercer punto.
Los puntos A, B y C son los ***vértices del triángulo*** y los segmentos que los vértices determinan son ***sus lados.***

Triángulo $ABC = AB, C \cap BC, A \cap CA, B$

POLÍGONO CONVEXO

35) Definición (14): Se dan ***n*** puntos coplanares, ordenados de manera tal que el siguiente del último sea el primero, que cada tres consecutivos no están alineados y que las rectas determinadas por cada dos consecutivos dejan en un mismo semiplano a los ***n-2*** puntos restantes. Llamamos **polígono convexo** [3], que tiene por ***vértices*** estos ***n*** puntos, a la intersección de los mencionados semiplanos.
Se llaman ***lados del polígono*** a los segmentos determinados por cada dos vértices consecutivos.

[3] Para una definición general de polígono ver el Apéndice III.

ORDEN en el ESPACIO

36) **Partición del espacio por un plano**: Todo plano α clasifica a los puntos de E que no pertenecen a α en dos conjuntos φ y φ^* que cumplen:

i) { α , φ , φ^* } es ***una partición*** de E.
ii) El segmento determinado por un punto de φ y un punto de φ^* tiene un punto y sólo uno en α .
iii) El segmento determinado por dos puntos de φ , o por dos puntos de φ^*, no tiene ningún punto en α . Se puede sustituir esta afirmación diciendo que φ y φ^* son figuras convexas [4].

SEMIESPACIO

37) Definición (15): Dado un plano α , llamamos **semiespacio** de borde el plano α , al conjunto formado por los puntos de este plano y todos los puntos de una de las dos regiones que el plano α determina en E según la proposición anterior.

Notación: α, P se lee: "semiespacio de borde α que pasa por P"
ABC, P se lee: "semiespacio de borde el plano ABC, que pasa por P"

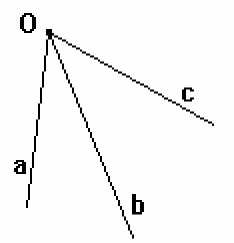
DIEDROS

38) Definición (16): Dados dos semiplanos que tienen por borde la misma recta ***r*** : el ***r***, A y el ***r***, B , llamamos **ángulo diedro convexo A,*r*,B de arista *r*** a la intersección de los semiespacios que tienen por bordes estos semiplanos y que incluyen al otro.
Es decir un ángulo diedro convexo es la figura intersección de dos semiespacios cuyos bordes son planos secantes. La recta intersección de los planos, que son bordes de estos semiespacios, se llama ***arista*** del diedro.

TRIEDROS

39) Definición (17): Dadas tres semirrectas de origen común, llamamos **ángulo triedro** a la intersección de tres semiespacios, los que tienen por borde los planos determinados por cada dos de estas semirrectas y que incluyen a la tercera. Estas semirrectas son las ***aristas*** de triedro, los ángulos convexos que cada dos de ellas determinan se llaman ***caras*** del triedro y el origen común de todas ellas se llama ***vértice del triedro***.

Vértice: O
Aristas: Semirrectas Oa , Ob , Oc
Caras: Ángulos aOb , bOc , cOa



Notación: Oabc se lee: "triedro O,a,b,c"

40) En todo triedro cada cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

[4] Ver proposición 32.

41) En todo triedro la suma de sus tres caras es menor que un ángulo completo.

ÁNGULO POLIEDRO CONVEXO

42) Definición (18): Dadas ***n*** semirrectas de origen común, ordenadas de manera tal que la siguiente de la última sea la primera, que cada tres consecutivas no sean coplanares y que los planos determinados por cada dos consecutivas dejan en un mismo semiespacio a las ***n-2*** semirrectas restantes. Llamamos **ángulo poliedro convexo**, que tiene por ***aristas*** estas ***n*** semirrectas, por ***caras*** los ángulos convexos determinados por cada dos aristas consecutivas y por ***vértice*** el origen común de todas ellas, a la intersección de los mencionados semiespacios.

43) En todo ángulo poliedro convexo, cualquiera de sus caras es menor que la suma de las restantes.

44) En todo ángulo poliedro convexo, la suma de todas sus caras es menor que un ángulo completo.

TETRAEDRO

45) Definición (19): Dados 4 puntos no coplanarios A, B, C, y D, llamamos ***tetraedro*** de ***vértices*** A, B, C, y D , a la figura intersección de los 4 semiespacios:

$$ABC, D \cap BCD, A \cap CDA, B \cap DAB, C .$$

Sus ***caras*** son los triángulos ABC , BCD , CDA y DAB ,
sus ***aristas*** los segmentos DA, DB , DC , AB , BC y CA ,
sus ***diedros*** son cada uno de los diedros convexos que incluyen al tetraedro y tienen por aristas las rectas determinadas por los vértices y
sus ángulos poliedros, son triedros con vértices en los vértices del tetraedro.

POLIEDRO

46) Definición (20): Llamamos **poliedro** [5] a la figura unión de un número finito de tetraedros tales que todos tengan al menos un punto en común con otro y que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea una de las siguientes figuras:

- el conjunto vacío,
- una cara común,
- una arista común,
- el conjunto unitario formado por un vértice común.

Los poliedros que sean figuras convexas, se llaman **poliedros convexos.**

47) Definiciones (21): Dado un poliedro todos los puntos del espacio que no pertenecen a ese poliedro se llaman ***puntos exteriores al poliedro*.**
Los puntos que pertenecen al poliedro pueden ser ***puntos frontera*** o ***puntos interiores al poliedro*.**

---

[5] Por otra definición general de poliedro ver el Apéndice III.

Un punto de un poliedro se llama ***punto frontera*** si siempre existen puntos exteriores al poliedro en cualquier esfera [6] que tenga centro en él.
Los puntos de un poliedro que ***no son puntos frontera*** se llaman ***puntos interiores.***

SUPERFICIE POLIÉDRICA CONVEXA

48) Definición (22): Llamamos **<u>superficie poliédrica convexa</u>** (o **cáscara poliédrica**) al conjunto formado por todos los puntos frontera de un poliedro convexo.
Se trata de una figura que es la unión de un número finito de polígonos convexos llamados ***caras*** que verifican las siguientes condiciones:

i) La intersección de dos caras cualesquiera puede ser: el conjunto vacío, o un segmento (un lado común a dichas caras), o un conjunto unitario formado por un vértice común.
ii) Dos caras cualesquiera no son coplanares.
iii) No hay tres caras con un lado común.
iv) Todos los lados de cada cara también son lados de otra cara.
v) Los planos que incluyen cada cara dejan en un mismo semiespacio a las restantes caras.

Llamamos aristas a los lados de las caras.
Los vértices de las caras son los vértices del poliedro y de la superficie poliédrica.

Teorema de EULER

49) En todo ***poliedro convexo*** la suma del número ***c*** de caras, más el número ***v*** de vértices, excede en dos unidades al número ***a*** de aristas.

$$\boldsymbol{c} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + 2$$

AXIOMA MÉTRICO

50) <u>Axioma métrico</u>:

i) Existe un función llamada ***<u>distancia</u>***, que va del producto cartesiano del Espacio por el Espacio (ExE), en el conjunto formado por todos los números reales positivos y el cero. Es decir, dados dos puntos cualesquiera del espacio P y Q, existe y es único el número real $\mu \geq 0$, tal que la distancia entre esos puntos es μ y lo anotamos $d(P,Q) = \mu$.
ii) Dados dos puntos A y B cualesquiera, se cumple que la $d(A,B) = d(B,A)$.
iii) Si un punto C pertenece al segmento que A y B determinan, se cumple: $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$.
iv) Si un punto C no pertenece al segmento que A y B determinan, se cumple: $d(A,C) + d(C,B) > d(A,B)$.
v) Dado un número real $\lambda \geq 0$ y una semirrecta OX, existe y es único un punto P en la semirrecta OX, tal que $d(O,P) = \lambda$.

51) La condición necesaria y suficiente para que dos puntos coincidan es que la distancia entre ellos sea cero.

CIRCUNFERENCIA

52) Definiciones (23): Dado un plano α, un punto O perteneciente a α y un número real ***r*** (positivo o cero), llamamos **circunferencia** de centro O y radio ***r*** , al conjunto de los puntos del plano α que están a la distancia ***r*** del punto O.

6 Por la definición de esfera ver la proposición 53.

CÍRCULO

El **círculo** de centro O y radio ***r*** es el conjunto de los puntos del plano α que están a una distancia menor o igual que ***r*** del O.

CÁSCARA ESFÉRICA

ESFERA

53) Definiciones (24): Dado un punto O del espacio E y un número real ***r*** (positivo o cero), llamamos **cáscara esférica** de centro O y radio ***r***, al conjunto de los puntos del espacio que están a la distancia ***r*** del punto O.
La **esfera** de centro O y radio ***r*** es el conjunto de los puntos del espacio que están a una distancia menor o igual que ***r*** del O.
(Observación: Muchos autores llaman ***esfera*** a lo que nosotros llamamos cáscara esférica y en ese caso le llaman ***bola*** a lo que nosotros llamamos ***esfera)***

ISOMETRÍAS

54) Definición (25): Una **isometría del espacio**, es una ***función biyectiva*** del Espacio en el Espacio, ***que conserva las distancias.***

55) En una isometría, a puntos alineados y en un cierto orden le corresponden puntos alineados y en el mismo orden. Es decir, las isometrías ***conservan las relaciones de pertenencia y orden.***

56) En una isometría la imagen de:

- una recta, es una recta.
- un segmento, es el segmento determinado por las imágenes de sus extremos.
- una semirrecta, es una semirrecta que tiene por origen la imagen del origen y está incluida en la imagen de la recta sostén de la semirrecta dada.
- un semiplano de borde r al que pertenece un punto P, es el semiplano que tiene por borde la imagen de r y al que pertenece la imagen de P.
- un semiespacio de borde α al que pertenece un punto P, es el semiespacio que tiene por borde la imagen de α y al que pertenece la imagen de P.

DETERMINACIÓN de ISOMETRÍAS

57) Axioma de determinación de las isometrías: Dadas:

- dos semirrectas AX y BY ,
- dos semiplanos: el α de borde $\overrightarrow{AX}$ [7] y el β de borde $\overrightarrow{BY}$,
- dos semiespacios : el φ de borde α [8] y el φ^* de borde β ,

existe y es única la isometría M tal que :

- $\boldsymbol{M}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{BY}$
- $\boldsymbol{M}(\alpha) = \beta$
- $\boldsymbol{M}(\varphi) = \varphi^*$

58) Las isometrías ***conservan el paralelismo.***

---

7 Nos referimos al semiplano α que tiene por borde la recta "sostén" de la semirrecta AX. Por razones de simplicidad diremos el "semiplano con borde la semirrecta".

8 Nos referimos al semiespacio φ que tiene por borde el plano que incluye al semiplano α. Por razones de simplicidad nos ponemos de acuerdo en decir el

"semiespacio con borde el semiplano".

59) Las isometrías ***conservan la perpendicularidad***.

60) Las isometrías en el espacio son:

Directas: La Identidad – Traslación – Giro – Movimiento Helicoidal.

No directas: Simetría central – Simetría especular – Reflexión con deslizamiento [9].

61) Definición (26): Una recta es **secante** a un plano, si la intersección de ambos es un punto.

PARALELISMO entre RECTA y PLANO

62) Definición (27): Una recta es **paralela** a un plano, si **no es secante con ese plano**.

Observación: Una recta es paralela a un plano cuando no tiene ningún punto en el plano o cuando está incluida en él.

63) La condición necesaria y suficiente para que una **recta sea paralela a un plano** es que **exista una paralela a dicha recta que esté incluida en ese plano.**

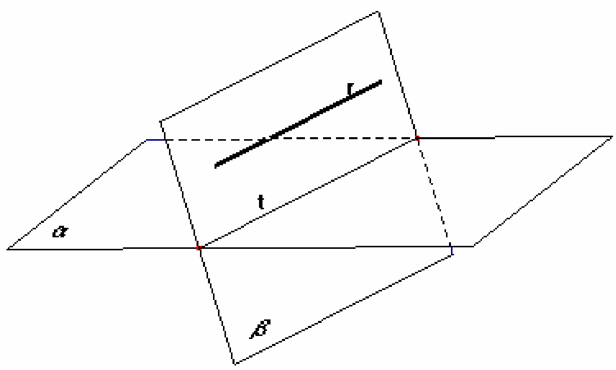
64) Por un punto exterior a un plano, existen infinitas rectas paralelas a ese plano.

65) Dados una recta y un punto exterior, existen infinitos planos paralelos a esa recta que pasan por el punto dado.

PLANO SECANTE al α por una PARALELA al α

66) Si una recta es paralela a un plano, todo plano que la incluya e interseque al primero lo interseca según una recta paralela a la recta dada.

$$\left.\begin{array}{l} r \parallel \alpha \\ r \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = t \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel t$$

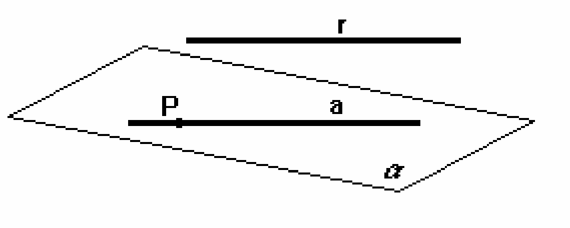


[9] A la ***Reflexión con deslizamiento*** en nuestro país se la conoce como ***Antitraslación***.

PARALELA a una RECTA por un PUNTO de un PLANO PARALELO

67) Si una recta es paralela a un plano, toda paralela a ella por un punto de ese plano, está incluida en dicho plano.

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r} \,//\, \alpha \\ P \in \alpha \\ P \in \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \,//\, \boldsymbol{r} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \subset \alpha$$



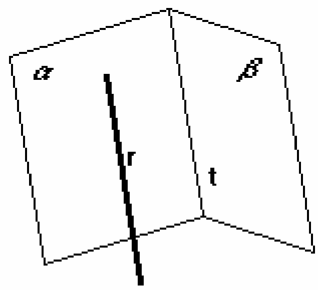
TRANSITIVIDAD del paralelismo entre rectas

68) Si una recta ***a*** es paralela a una recta ***b*** y ***b*** es paralela a una recta ***c***, se cumple que la recta ***a*** es paralela a la recta ***c***.

RECTA PARALELA a dos PLANOS SECANTES

69) Si una recta es paralela a dos planos secantes, entonces es paralela a su intersección.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{r} \,//\, \alpha \\ \boldsymbol{r} \,//\, \beta \end{array}\right. \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} \,//\, \boldsymbol{t}$$

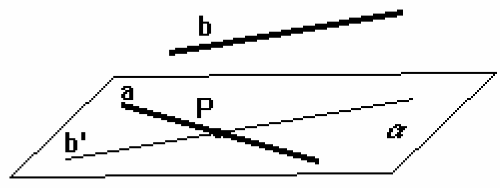


70) Si **dos rectas se cruzan**, **existe** y es **único** el plano que incluye a una de ellas y es paralelo a la otra.

no$\exists\, \beta \mid \boldsymbol{a} \subset \beta , \boldsymbol{b} \subset \beta \Rightarrow$

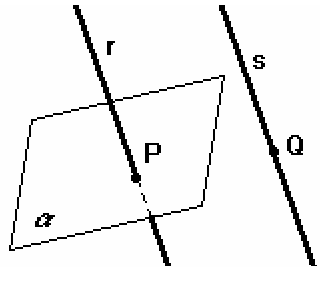
$\exists\, \alpha \mid \boldsymbol{a} \subset \alpha , \boldsymbol{b} \,//\, \alpha$,

α es único



71) Todo plano que interseca a una de dos rectas paralelas, también interseca a la otra.

$$\exists\, P \mid \{P\} = \boldsymbol{r} \cap \alpha \underset{\boldsymbol{r} \,//\, \boldsymbol{s}}{\Rightarrow} \exists\, Q \mid \{Q\} = \boldsymbol{s} \cap \alpha$$



72) Definición (28): **Dos planos son secantes** si su intersección es una recta.

PARALELISMO entre PLANOS

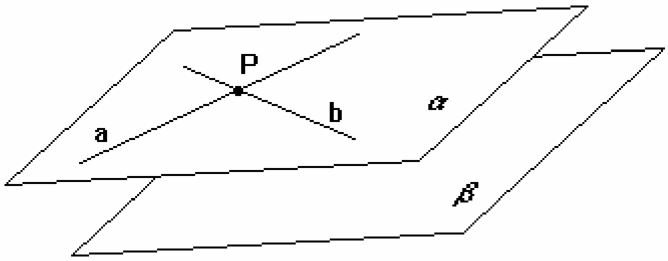
73) Definición (29): **Dos planos son paralelos** si **no son secantes**.
Comentario: Dos planos son paralelos cuando son coincidentes o cuando son conjuntos disjuntos.

74) Si dos planos son paralelos, todas las rectas incluidas en uno de ellos son paralelas al otro.

CONDICIÓN NECESARIA y SUFICIENTE

75) La condición necesaria y suficiente para que **dos planos sean paralelos,** es que **uno de ellos incluya <u>dos rectas secantes entre sí</u> que sean paralelas al otro**.

$\alpha // \beta \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathrm{P} \mid \boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \{\mathrm{P}\}\ ,\ \boldsymbol{a} // \beta\ ,\ \boldsymbol{b} // \beta\ ,\ \boldsymbol{a} \subset \alpha\ ,\ \boldsymbol{b} \subset \alpha$



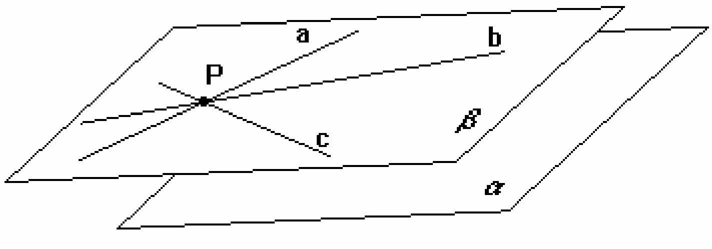
76) Existe y es único el plano paralelo a otro por un punto.

TRANSITIVIDAD del paralelismo entre planos

77) Si un plano α es paralelo a un plano β y β es paralelo a un plano ξ, se cumple que α es paralelo a ξ.

LUGAR GEOMÉTRICO de las rectas PARALELAS a un PLANO por un PUNTO

78) El lugar geométrico de las rectas paralelas a un plano por un punto, es el plano paralelo al plano dado, por ese punto.
$\mathrm{P} \in \boldsymbol{a, b, c}\quad ;\quad \boldsymbol{a, b, c} // \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \beta \mid \boldsymbol{a, b, c} \subset \beta\ ,\ \beta // \alpha\ ,\ \mathrm{P} \in \beta$



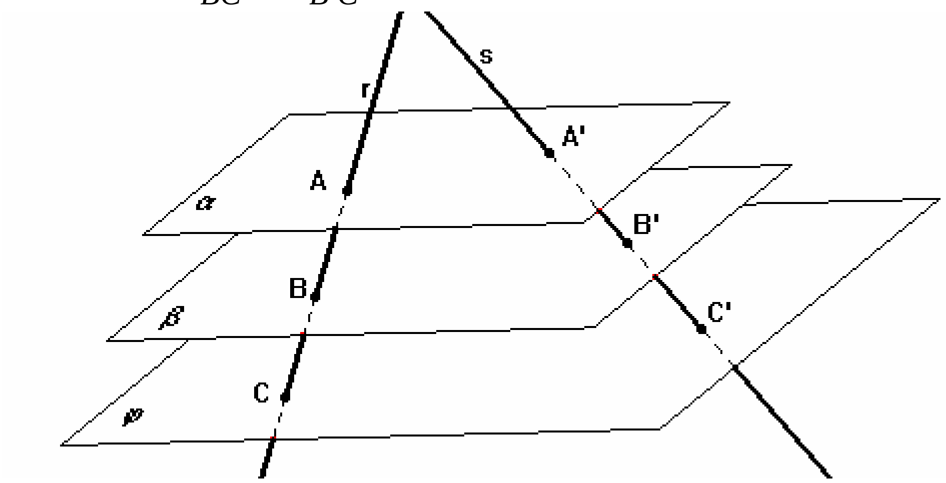
79) Si una recta es secante con uno de dos planos paralelos, también interseca al otro.

80) Los segmentos que sobre rectas paralelas determinan dos planos paralelos, son congruentes.

TEOREMA de THALES

81) Son proporcionales los segmentos que tres o más planos paralelos determinan sobre dos rectas secantes a dichos planos.

$$\alpha \ // \ \beta \ // \ \varphi \ \Rightarrow \ \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

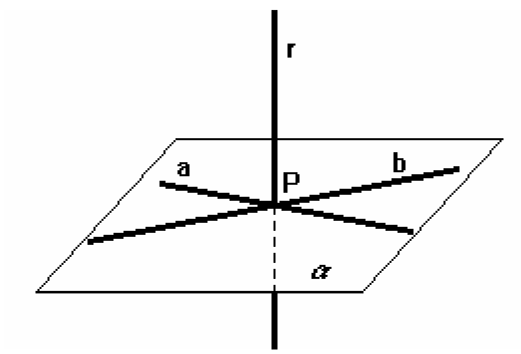


Comentario: las rectas r y s pueden ser no coplanares.

RECTA PERPENDICULAR a un PLANO

82) Definición (30): ***Una recta es perpendicular a un plano*** si y sólo si es perpendicular a todas las rectas de ese plano que pasan por su pie en dicho plano.

83) ***La condición necesaria y suficiente*** para que una ***recta sea perpendicular a un plano*** es que sea ***perpendicular a dos rectas secantes que pasando por su pie están incluidas en dicho plano.***



$$\boldsymbol{r} \perp \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \{P\} \\ \boldsymbol{a} \subset \alpha \\ \boldsymbol{b} \subset \alpha \\ P \in \boldsymbol{r} \end{array}$$

84) El lugar geométrico de las perpendiculares a una recta en uno de sus puntos, es el plano perpendicular a ella en dicho punto.

85) Si una recta es perpendicular a un plano, todas las paralelas a ella también lo son.

$$\boldsymbol{a} \perp \alpha \quad , \quad \boldsymbol{a} \,//\, \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b} \perp \alpha$$

86) Si una recta es perpendicular a un plano, entonces es perpendicular a todos los planos paralelos a él.

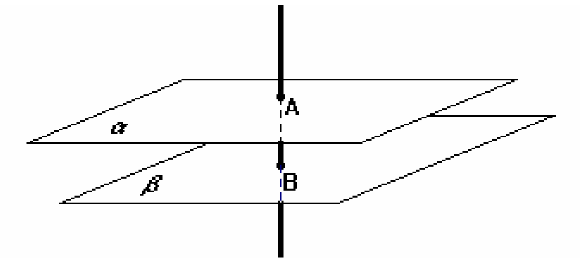
DISTANCIA entre PLANOS PARALELOS

87) Definición (31): Llamamos ***distancia entre dos planos*** paralelos a la distancia entre los puntos de intersección de dichos planos con una recta perpendicular a ellos.

$\alpha \,//\, \beta$

$\Rightarrow d(\alpha , \beta) = d(A , B)$

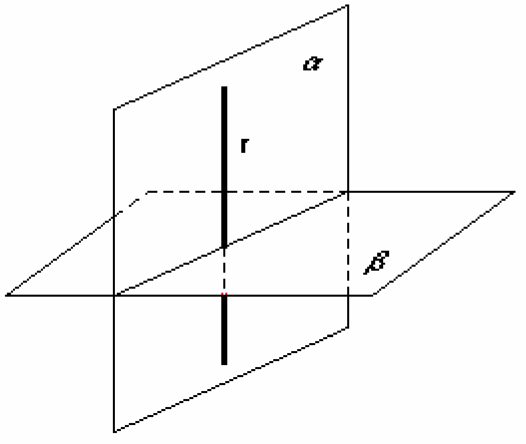
$\boldsymbol{r} \perp \alpha$



PLANOS PERPENDICULARES

88) Definición (32): Decimos que **dos planos son perpendiculares** cuando uno de ellos incluye una recta perpendicular al otro.

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{r} \subset \alpha \ , \ \boldsymbol{r} \perp \beta$$



89) La relación perpendicularidad entre planos cumple ***la propiedad recíproca***.

$$\alpha \perp \beta \quad \Rightarrow \quad \beta \perp \alpha$$

90) Si en uno de dos planos perpendiculares se traza una perpendicular a la intersección de ambos planos, esta recta es perpendicular al otro plano.

$$\alpha \perp \beta \ , \ \alpha \cap \beta = \boldsymbol{t} \ , \ \boldsymbol{r} \subset \alpha \ , \ \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} \perp \beta$$

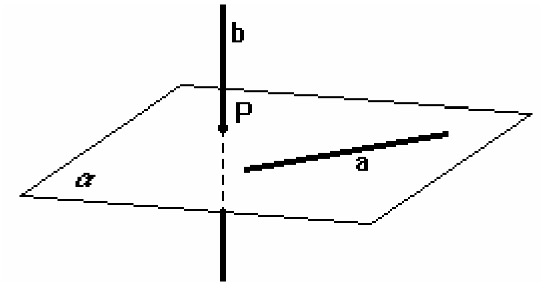
91) Si dos planos son perpendiculares y por un punto de uno de ellos se traza la perpendicular al otro entonces esa recta está incluida en el primer plano.

$$\alpha \perp \beta \ , \ P \in \alpha \ , \ P \in \boldsymbol{r} \ , \ \boldsymbol{r} \perp \beta \ \Rightarrow \ \boldsymbol{r} \subset \alpha$$

RECTAS ORTOGONALES

92) Definición (33): ***Una recta es ortogonal con otra*** si existe un plano que la incluye y es perpendicular a la otra.

$$\boldsymbol{a} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow \ \exists\, \alpha \ / \ \boldsymbol{a} \subset \alpha \ , \ \boldsymbol{b} \perp \alpha$$

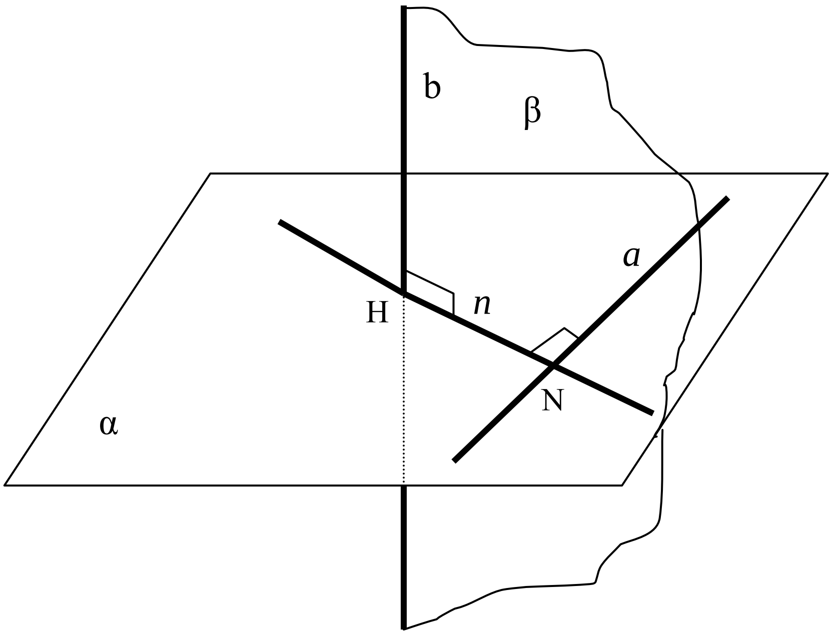


TEOREMA de las TRES PERPENDICULARES

(Propiedad recíproca de la ortogonalidad)

93) La relación de ***ortogonalidad entre rectas*** cumple la ***propiedad recíproca***.

$$\boldsymbol{a} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{b} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{b} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{a}$$



Notación:

- Recta que pasa por los puntos A y B, lo anotamos: $\overline{AB}$
- El segmento de extremos A y B, lo anotamos: $\overset{\vdash\!\dashv}{AB}$
- La semirrecta de origen A a la que pertenece B, lo anotamos: $\overset{\vdash\!-}{AB}$

APÉNDICE I

UN SISTEMA AXIOMÁTICO PARA UNA GEOMETRÍA EUCLIDIANA PLANA[1]

Comentarios previos:

Al realizar la presentación axiomática de una Geometría Euclidiana Plana es preciso puntualizar que utilizaremos:

- Las reglas de la LÓGICA CLÁSICA para deducir proposiciones a partir de otras que sean verdaderas.
- El Álgebra de CONJUNTOS.
- El conjunto de los NÚMEROS REALES, estructurado como un CUERPO CONMUTATIVO, ORDENADO y COMPLETO.

A.- CONCEPTOS PRIMITIVOS

Partimos de un conjunto llamado **PLANO** y a sus elementos les llamamos **PUNTOS**.

En el plano destacamos ciertos subconjuntos a los que les llamamos **RECTAS.**

Comentario: Los conceptos primitivos son sólo dos. Estos pueden ser:

- **PUNTO y RECTA.**

  En este caso, definimos al PLANO como el conjunto de todos los PUNTOS.

- **PLANO y RECTA.**

  En este caso a los PUNTOS los definimos como los elementos del PLANO.

[1] Los axiomas seleccionados son esencialmente los que presenta Héctor Merklen en *Geometría,* editado por el "Instituto para la Promoción de la Enseñanza de la Ciencia" – Lima - 1964.

B.- AXIOMAS

B.1) AXIOMAS DE PERTENENCIA

(I) *Axioma de existencia de rectas:*

Existen al menos dos rectas incluidas en el plano y a cada recta pertenecen al menos dos puntos.

$\exists \; a, b \in R$ ([2]) $/ \quad a \subset \pi$ ([3]) $, \quad b \subset \pi$

$\forall r \in R, \quad \exists \; P, Q / \quad P \in r, \; Q \in r$

(II) *Axioma de determinación de rectas:*

Para todo par de puntos distintos, existe y es única la recta a la cual pertenecen.

$\forall \; P, Q \in \pi, \quad \exists \; a \in R / \; P \in a, \; Q \in a \; ;$

$\forall \; a, b \in R \; / \; P \in a, \; Q \in a \quad y \quad P \in b, \; Q \in b \; \Rightarrow \; a = b$

B.2) AXIOMA DE PARALELISMO

(III) *Axioma de Paralelismo [4] (de Euclides [5]):*

Para cada recta y para cada punto exterior a ella, existe y es única la paralela a dicha recta por ese punto.

---

[2] Con *R* nombramos al conjunto de todas las rectas del plano π, al que le llamamos Familia de las rectas de π.

[3] Con π nombramos al conjunto de todos lo puntos, es decir al plano.

[4] Una recta es paralela a otra, si coincide con ella o cuando no tiene ningún punto que pertenezca a la otra recta.

[5] La proposición que acá presentamos la nombramos así en honor a *EUCLIDES.* En realidad hemos optado por la redacción propuesta por Playfair. El quinto postulado que Euclides presenta en su libro *Elementos* escrito entre los años 330 y 320 a. de C. dice: *Si una línea recta que corta a otras dos rectas forma de un mismo lado con ellas ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos últimas rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.*

B.3) AXIOMAS DE ORDEN

(IV) ***Axioma de ordenación de los puntos de una recta:***

En cada recta, entre sus puntos está definida una relación, llamada ***preceder ampliamente***[6] que es una relación de ***orden total amplio*** [7].

(V) ***Axioma de partición del plano:***

i) Toda recta determina en el plano una ***partición*** en tres conjuntos: la recta y los dos ***semiplanos abiertos***[8] , ω y ώ , con borde en ella.

ii) ω y ώ son figuras[9] convexas. [10]

iii) Cualquier segmento determinado por dos puntos de semiplanos abiertos opuestos, siempre corta a la recta.

B.4) AXIOMA MÉTRICO

(VI) ***Axioma Métrico:***

i) Existe una función, llamada distancia, cuyo dominio es el producto cartesiano del plano por el plano y el codominio es el conjunto formado por el cero y todos los números reales positivos.[11]

---

[6] En adelante la llamaremos ***"preceder",*** sobreentendiendo que se trata de un orden *"amplio".*

[7] Entonces la relación ***"preceder"*** cumple las propiedades:

(I) Idéntica - Todo punto se precede a sí mismo.

(II) Antisimétrica - Si un punto A precede a un punto B y el B precede al A, entonces el punto A coincide con B.

(III) Transitiva - Si tres puntos A, B y C de una recta cumplen que A "precede a" B y B "precede a" C, entonces A "precede a" C.

(IV) Total - Dados dos puntos cualesquiera en una recta, uno de ellos precede al otro.

[8] Los puntos de la ***recta borde*** no pertenecen al ***semiplano abierto.***

[9] Llamamos "figura" a cualquier conjunto de puntos.

[10] Una figura es *convexa* si incluye el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la misma.

[11] Es decir, la función distancia establece que a cada par de puntos del plano le corresponde siempre un número real positivo o nulo.

ii) La distancia no cambia cualquiera sea el orden en que se consideren los puntos.

iii) Si un punto ***pertenece*** a un segmento, se cumple que la suma de sus distancias a los extremos del segmento ***es igual a*** la distancia entre los extremos.

iv) Si un punto ***no pertenece*** a un segmento, se cumple que la suma de sus distancias a los extremos de dicho segmento ***es mayor que*** la distancia entre los extremos. [12]

v) Dado un número real positivo o nulo μ, una recta orientada r, y un punto A en ella, existe y es único el punto B de la recta r, que sigue al A y tal que la distancia del A al B es μ.

B.5) AXIOMA DE LAS ISOMETRÍAS

(VII) ***Axioma de determinación de isometrías:***

Dados dos puntos A y B, dos semirrectas con orígenes en ellos Ax y By [13], y dos semiplanos, μ y μ', de bordes respectivamente en dichas semirrectas[14], existe y es única la isometría M tal que:

$$M\,(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \qquad M\,(\overset{\vdash}{\mathrm{A}x}) = \overset{\vdash}{\mathrm{B}y} \qquad \text{y} \qquad M\,(\mu) = \mu'$$

---

[12] A esta propiedad se la conoce como "propiedad triangular".

[13] Comentario sobre notación: es usual identificar a una semirrecta nombrando primero su origen (el punto A) y a continuación utilizar una letra minúscula que correspondería a su nombre (acá por ejemplo, de todas las semirrectas de origen A, estamos considerando la que llamamos "*x*")

[14] Para abreviar, convenimos en expresarnos de esta manera, en lugar de decir que los semiplanos tienen por bordes las rectas "sostén" de dichas semirrectas.

APÉNDICE II

UN SISTEMA AXIOMÁTICO PARA UNA GEOMETRÍA EUCLIDIANA DEL ESPACIO

A.- CONCEPTOS PRIMITIVOS

Los conceptos primitivos que tomaremos son:

• **PUNTO** [15] • **RECTA** [16] • **PLANO** [17]

Partimos de un conjunto llamado **ESPACIO** [18] y a sus elementos les llamamos **PUNTOS**. En el espacio destacamos ciertos subconjuntos que les llamamos **PLANOS**. En cada plano existen unos subconjuntos llamados **RECTAS**. [19] Estos conceptos los caracterizaremos a partir de los axiomas.

B.- AXIOMAS

B.1.- AXIOMAS DE PERTENENCIA

(I) ***Axioma de existencia de rectas y planos:***

Existen al menos dos planos, en cada plano están incluidas al menos dos rectas y a cada recta pertenecen al menos dos puntos.

---

[15] A los puntos los nombraremos y anotaremos con letras mayúsculas.
[16] A las rectas las nombraremos y anotaremos con letras minúsculas.
[17] A los planos los nombraremos y anotaremos con letras griegas.
[18] Al espacio lo nombraremos **E**.
[19] Comentario: los conceptos primitivos son sólo tres. Al espacio lo ***definimos*** como el conjunto de todos los puntos.

(II) ***Axioma de determinación de rectas:***

Para todo par de puntos distintos, existe y es única la recta a la cual pertenecen.

(III) ***Axioma de determinación de planos:***

Dados tres puntos no alineados, existe y es único el plano al cual pertenecen.

(IV) Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, dicha recta está incluida en ese plano.

B.2.- AXIOMA DE PARALELISMO

(V) ***Axioma de Euclides:***

Por un punto existe y es única la paralela a una recta dada.

B.3.- AXIOMAS DE ORDEN

(VI) ***Axioma de orden en la recta (Primer Axioma de Orden):***

En cada recta, entre sus puntos está definida una relación, llamada ***preceder ampliamente***[20], que es una relación de ***orden total amplio***[21].

---

[20] Al igual que en el abordaje de una Geometría Euclidiana Plana, en adelante sólo diremos ***"preceder"*** sobreentendiendo que se trata de un orden ***"amplio".***

[21] Entonces la relación "preceder ampliamente" cumple las propiedades:

(I) Idéntica -Todo punto se precede a sí mismo.

(II) Antisimétrica - Si un punto A precede a un punto B y el B precede al A, entonces el punto A coincide con B.

(III) Transitiva -Si tres puntos A, B y C de una recta cumplen que A "precede a" B y B "precede a" C, entonces A "precede a" C.

(IV) Total - Dados dos puntos cualesquiera en una recta, uno de ellos precede al otro.

(VII) ***Axioma de partición del Plano (Segundo Axioma de Orden):***

Toda recta r de un plano α clasifica a los puntos de α que no pertenecen a r en dos conjuntos φ y $\varphi*$ (***semiplanos abiertos de borde la recta r***) que cumplen:

i) $\{ r , \varphi , \varphi* \}$ es ***una partición*** de α. Es decir: los conjuntos r , φ y $\varphi*$, no son vacíos, son disjuntos dos a dos y la unión de todos es el plano α.

ii) El segmento determinado por un punto de φ y un punto de $\varphi*$ tiene un punto y sólo uno en r.

iii) Las figuras φ y $\varphi*$ son convexas. [22]

(VIII) ***Axioma de partición del Espacio (Tercer axioma de Orden):***

Todo plano α clasifica a los puntos de **E** que no pertenecen a α en dos conjuntos λ y $\lambda*$ (***semiespacios abiertos de borde el plano*** α) que cumplen:

i) $\{ \alpha , \lambda , \lambda* \}$ es *una partición* de **E**. Es decir los conjuntos α , λ y $\lambda*$, no son vacíos, son disjuntos dos a dos y la unión de todos es el espacio **E**.

ii) El segmento determinado por un punto de λ y un punto de $\lambda*$ tiene un punto y sólo uno en α .

iii) Las figuras λ y $\lambda*$ son convexas.

B.4.- AXIOMA MÉTRICO

(IX) ***Axioma Métrico:***

i) Existe una función, llamada distancia, cuyo dominio es el producto cartesiano del espacio por el espacio y el codominio es el conjunto formado por el cero y todos los números reales positivos. [23]

[22] Recordemos que una figura es convexa cuando el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de dicha figura está siempre incluido en ella.

[23] Es decir, la función distancia establece que a cada par de puntos del espacio le corresponde siempre un número real positivo o nulo.

ii) La distancia no cambia cualquiera sea el orden en que se consideren los puntos.

iii) Si un punto ***pertenece*** a un segmento, se cumple que la suma de sus distancias a los extremos del segmento ***es igual a*** la distancia entre los extremos.

iv) Si un punto ***no pertenece*** a un segmento, se cumple que la suma de sus distancias a los extremos de dicho segmento ***es mayor que*** la distancia entre los extremos. [24]

v) Dado un número real positivo o nulo μ, una recta orientada r, y un punto A en ella, existe y es único el punto B de la recta r, que sigue al A y tal que la distancia del A al B es μ.

B.5.- AXIOMA DE LAS ISOMETRÍAS

(X) ***Axioma de determinación de isometrías:***

Dados dos puntos A y B, dos semirrectas con orígenes en ellos Ax y By , dos semiplanos, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu'}$, de bordes respectivamente en dichas semirrectas , y dos semiespacios α y α' con bordes respectivamente en estos semiplanos[25], existe y es única la isometría ***M*** tal que:

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \qquad \boldsymbol{M}(\overset{\vdash}{\mathrm{A}}x) = \overset{\vdash}{\mathrm{B}}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu'} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{M}(\alpha) = \alpha'$$

[24] A esta propiedad se la conoce como “propiedad triangular”.

[25] De manera análoga a cuando, por abreviar, decimos ***“semiplano de borde la semirrecta...”*** , al decir ***“semiespacio con borde el semiplano...”*** tenemos que explicitarles a nuestros alumnos que estamos dando por sobreentendido que nos referimos al ***“semiespacio con borde en el plano que incluye al semiplano...”*** .

APÉNDICE III

POLÍGONOS Y POLIEDROS

1. POLÍGONOS

1.1) Definición:

Una LÍNEA POLIGONAL CERRADA SIMPLE (o simplemente POLIGONAL CERRADA SIMPLE) es la figura unión de un número finito[1] de segmentos que cumplen tres condiciones:

1) dos cualesquiera de estos segmentos o tienen un extremo en común o no tienen ningún punto en común.
2) todos estos segmentos cumplen que cada uno de sus extremos es también extremo de uno y sólo uno de los otros segmentos.
3) dos de estos segmentos que tengan un extremo común (consecutivos) no pueden estar incluidos en una misma recta, no pueden ser colineales.

[1] El número de segmentos es mayor o igual a tres.

- Cada uno de estos segmentos se llama LADO de la *poligonal*; sus extremos son los VÉRTICES de la *poligonal*.

- Un punto es PUNTO INTERIOR a la *poligonal* si cumple que toda semirrecta con origen en él siempre interseca a la *poligonal* en al menos un punto. Un punto es PUNTO EXTERIOR a la *poligonal* si al menos una semirrecta con origen en él no tiene ningún punto en la *poligonal*.

- El INTERIOR de la *poligonal* es el conjunto de todos sus puntos interiores.

1.2) Definición:

Llamamos POLÍGONO a la figura unión de una *poligonal* y su *interior*.

- Los lados y los vértices de la *poligonal* son los LADOS y los VÉRTICES del POLÍGONO generado por esa *poligonal*.
- La *poligonal* es el CONTORNO o FRONTERA del polígono.

1.3) Definición:

Un POLÍGONO es CONVEXO si es una figura convexa. Es decir si el segmento determinado por dos cualesquiera de sus puntos está siempre incluido en él.
Cuando un polígono es convexo, cualquier semirrecta con origen en uno de sus puntos interiores siempre interseca al contorno en un punto y en uno solo.
(Por otra definición ver la proposición Nº 35)

2. POLIEDROS

Definición:

Una CÁSCARA o SUPERFICIE POLÍEDRICA es la figura unión de un número finito[1] de polígonos que cumplen tres condiciones:

1) dos cualesquiera de estos polígonos o tienen un lado en común, o un vértice en común, o no tienen ningún punto en común.
2) todos estos polígonos cumplen que cada uno de sus lados es también lado de uno y sólo uno de los restantes polígonos.
3) dos de estos polígonos que tengan un lado común no pueden ser coplanares.

[1] El número de polígonos es mayor o igual que cuatro.

- A cada uno de estos polígonos se le llama CARA de la *cáscara poliédrica*, sus lados y vértices son respectivamente ARISTAS y VÉRTICES de la *cáscara poliédrica*.

- Un punto es PUNTO INTERIOR a la *cáscara poliédrica* si cumple que toda semirrecta con origen en él siempre tiene intersección no vacía con la cáscara. Un punto es PUNTO EXTERIOR a la *cáscara poliédrica* si cumple que existe al menos una semirrecta con origen en él que no tiene ningún punto en la *cáscara poliédrica*.

- El INTERIOR de la *cáscara poliédrica* es el conjunto de todos sus puntos interiores.

Definición:

Llamamos POLIEDRO a la unión de una *cáscara poliédrica* y *su interior*. Las caras, aristas y vértices de la *cáscara poliédrica* son las caras, aristas y vértices del poliedro generado por la superficie poliédrica.

BIBLIOGRAFÍA

BLUMENTHAL, Leonard (1963) - ***Geometría Axiomática.*** Edit. AGUILAR. Madrid.

BOYER, Carl (1987) - ***Historia de la Matemática.*** Alianza Editorial Textos. Madrid.

COXETER, H. S. M. y GREITZER, S. L. (1993) - ***Retorno a la Geometría.*** Colección: "La Tortuga de Aquiles". DLS-EULER, Editores. Madrid.

COXETER, H. S. M. (1971) - ***Fundamentos de Geometría.*** Edit. Limusa – Wiley, S.A. México.

CHOQUET, Gustave (1964) - ***L'Enseignement de la Géomètrie.*** Hermann. Paris.

EFÍMOV, N.V. (1984).-.***Geometría Superior.*** Editorial MIR. Moscú.

EVES, Howard (1969) - ***Estudio de las Geometrías.*** Editorial UTEHA. México.

MERKLEN, Héctor (1964).-.***Geometría.*** Instituto para la Promoción de las Matemáticas. Lima.

MOISE, Edwin (1968) - ***Elementos de Geometría Superior***. Compañía Editorial Continental S.A. México.

MOISE, Edwin y DOWNS, Floyd (1986) - ***Geometría Moderna***. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Wilminston, Delaware, U.S.A.

PUIG ADAM, Pedro (1947) - ***Curso de Geometría Métrica - Tomos I y II.*** Nuevas Gráficas S.A. Madrid.

ROANES, Eugenio (1980) - ***Introducción a la Geometría.*** Ediciones Anaya S.A. Madrid.

SEVERI, Francesco (1965) - ***Elementos de Geometría.*** Editorial Labor. Barcelona.