

## REPRESENTACION Y SIMPLIFICACION DE FUNCIONES LOGICAS. COMPUERTAS LOGICAS.

### 2.1 Algebra de Boole. Constantes, variables y funciones booleanas.

**Constante:** Un valor dado que puede tomar un elemento de  $\mathfrak{R}$ , como por ejemplo 0 y 1.

**Variable:** Un símbolo que representa un elemento de  $\mathfrak{R}$ .

**Función:** Combinación finita de elementos de  $\mathfrak{R}$  a través de los operadores “.” y “+”.

**Nº de variables de una función:** Es el número de elementos distintos que aparecen en una función, considerándose que una variable y su complemento son una única variable.

$a + b \Rightarrow 2$  variables

$x + x \Rightarrow 1$  variable

#### Funciones Básicas

a) Igualdad  $S=b$

b) Unión (función =O)  $S=a+b$

c) Intersección (función Y)  $S=a.b$

d) Negación (función NO), También denomina función complemento  $S= \overline{A}$

### 2.2 Postulados, teoremas y propiedades del algebra de Boole.

Las operaciones de suma (+) y producto (·) lógicas tienen reglas similares, aunque no iguales a las operaciones de la aritmética tradicional. El álgebra de variables lógicas estudia estas relaciones y se llama Algebra de Boole.

Los postulados del álgebra de Boole son cuatro. Sean A y B variables lógicas:

1) Las operaciones (+) y (·) son **conmutativas**

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2) Existe un **elemento neutro** para cada una de las operaciones (+) y (·)

$$0 + A = A$$

$$1 \cdot A = A$$

3) Cada operación es **distributiva** con respecto a la otra

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

4) Para cada elemento A existe un elemento, llamado **complemento**  $\bar{A}$ , tal que

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

Cualquier propiedad del álgebra de Boole sigue siendo válida si se intercambian los “+” por los “·” y los “1” por los “0”. Esto se conoce como PRINCIPIO DE DUALIDAD.

Basándose en los postulados anteriores se pueden construir todos los teoremas relacionados con las operaciones lógicas. Algunos teoremas importantes son:

$$A + 1 = 1$$

(Anulación)

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A + A = A$$

(Idempotencia)

$$A \cdot A = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

(Ley de Absorción)

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

(Teorema de De Morgan)

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

### Involución

$$\overline{\bar{X}} = X$$

En consecuencia basta demostrar uno de los enunciados para posteriormente deducir el otro por dualidad.

**Ejemplo 1:** Demostrar que  $\forall a \in \mathfrak{R} a \cdot 0 = 0$ .

Dem:

$$\begin{aligned} (a \cdot 0) &= (a \cdot 0) + 0 && \text{/por postulado 2} \\ &= a \cdot 0 + a \cdot \bar{a} && \text{/por postulado 4} \\ &= a \cdot (\bar{a} + 0) && \text{/por postulado 3} \\ &= a \cdot \bar{a} && \text{/por postulado 2} \\ &= 0 && \text{/por postulado 4} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2:** Demostrar que  $\forall a, b \in \mathfrak{R} a + a \cdot b = a$

Dem:

$$\begin{aligned} a + a \cdot b &= a \cdot 1 + a \cdot b \text{ /por postulado 2} \\ &= a \cdot (1 + b) \text{ /por postulado 3} \\ &= a \cdot 1 \text{ /por demostración anterior} \\ &= a \text{ /por postulado 2} \end{aligned}$$

**Ejercicios.** Demostrar:

a)  $a \cdot a = a$  b)  $a + 1 = 1$  c)  $a \cdot (a + b) = a$  d)  $a \cdot (a + b) = a \cdot b$

**Principio de dualidad**

El concepto de dualidad permite formalizar este hecho: a toda relación o ley lógica le corresponderá su dual, formada mediante el intercambio de los operadores unión (suma lógica) con los de intersección (producto lógico), y de los 1 con los 0.

Además hay que cambiar cada variable por su negada. Esto causa confusión al aplicarlo en los teoremas básicos, pero es totalmente necesario para la correcta aplicación del principio de dualidad. Véase que esto no modifica la tabla adjunta.

	<b>Adición</b>	<b>Producto</b>
1	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$
2	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
3	$a + 1 = 1$	$a \cdot 0 = 0$

4	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
5	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
6	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
8	$a + a \cdot b = a$	$a \cdot (a + b) = a$
9	$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

**2.3 Tabla de la verdad. Forma canónica de una función lógica.**

Estamos familiarizados con el concepto de variable y con el concepto de función de una variable. Una función es una regla por la que determinamos el valor de una variable dependiente y a partir de una variable independiente  $x$ . La dependencia de  $y$  respecto de  $x$  se escribe  $y = f(x)$ .

Cuando el número de valores permitidos de la variable  $x$  es finito, es posible especificar una función simplemente por una tabla que da los valores de  $y$  para cada valor de  $x$ . Si el número de valores de  $x$  es pequeño, lo más práctico y conveniente es usar esa tabla. Por ejemplo, supongamos la función  $f(x)=x^2$ . Si limitamos  $x$  a los valores enteros  $x = 0, 1, 2$  y  $3$ , podemos representar la relación funcional entre  $x$  e  $y$  mediante una tabla de cuatro filas.

$x$	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9

Las variables, dependiente e independiente, no tienen por qué ser numéricas. Por ejemplo, supongamos que la variable independiente  $x$  sea los colores de las luces de un semáforo (excluimos el amarillo) y la variable dependiente  $y$  sea la respuesta de un conductor ante dichas señales. Los valores que puede tomar  $x$  se expresan por las sentencias: “La luz es verde” o “la luz es roja”. Similarmente, los valores que puede tomar  $y$  se pueden expresar por “El conductor continúa” o “El conductor se detiene”.

$x$	$f(x)$
rojo	se detiene
verde	continúa

## Variables lógicas

**Una variable lógica es una variable que puede tomar uno u otro de sólo dos valores posibles y mutuamente excluyentes.**

Consideremos el ejemplo anterior del semáforo con luces roja y verde. La variable  $x$  de la tabla, es una variable lógica. O bien  $x = verde$ , o  $x = rojo$ . A causa de la exclusión mutua, si queremos indicar  $x = rojo$  podemos hacerlo también escribiendo  $x = no\ verde$ . En una notación más simple, el “no” se representa colocando una barra sobre el valor. Así  $x = no\ verde$  puede escribirse  $x = \overline{verde}$ . Por lo tanto la variable  $x$  puede tomar solamente dos valores,  $x = \overline{verde}$ , o  $x = verde$ .

Ejemplos de variables lógicas son: “ $x$  mayor que 3” y “ $x$  menor o igual que 3”; “está lloviendo” y “no está lloviendo”, etc. Las variables lógicas pueden representar cualquier cosa: colores, temperatura, luz, etc. A una variable lógica se le suelen asignar dos nombres estándar, para que podamos considerarla independientemente de lo que pudieran representar.

Los nombres deben ser fácilmente distinguibles y mutuamente excluyentes. Por ejemplo: “sí o no”, “verdadero (V) o falso (F)”, etc.

Así, la tabla anterior, que expresaba la relación funcional entre el color del semáforo y el comportamiento del conductor, puede representarse también mediante los símbolos V y F.

$x$	$y = f(x)$
<i>no verde</i>	<i>se detiene</i>
<i>verde</i>	<i>no se detiene</i>

$x$	$y = f(x)$
<b>F</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>

Una tabla como la anterior se denomina *TABLA DE VERDAD*.

**Tabla de la verdad**

Una tabla de verdad representa los distintos valores que toma la función lógica para cada una de las combinaciones posibles de las variables de entrada.

En los circuitos de computadoras, los símbolos más convenientes y usados para representar los dos estados posibles son el **0** y el **1**. A dichos estados se los puede asociar fácilmente con dígitos binarios. En lo sucesivo emplearemos dicha notación.

Así, la tabla de verdad anterior quedaría:

<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>

La comprobación de los teoremas antes mencionados puede hacerse algebraicamente empleando los postulados, o bien mediante tablas de verdad. Como ejemplo, comprobaremos el teorema de De Morgan usando una tabla de verdad.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A + B</b>	$\overline{A + B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \overline{B}}$
<b>0</b>	<b>0</b>	0	<b>1</b>	1	1	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	1	<b>0</b>	1	0	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	1	<b>0</b>	0	1	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	1	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>

**2.4 Compuertas lógicas. Simplificación de funciones por el método algebraico.**

**Funciones lógicas**

Una función lógica expresa una relación entre una o más entradas de variables lógicas. Dichas funciones se representan convenientemente mediante tablas de verdad, aunque también se utilizan expresiones algebraicas. Las funciones lógicas más comunes tienen un nombre propio. Cada función tiene un símbolo distintivo, con una o más entradas, designadas en este caso por A y B, y una salida. Tanto las entradas como las salidas son variables lógicas, por lo que su valor o estado lógico será 0 ó 1.

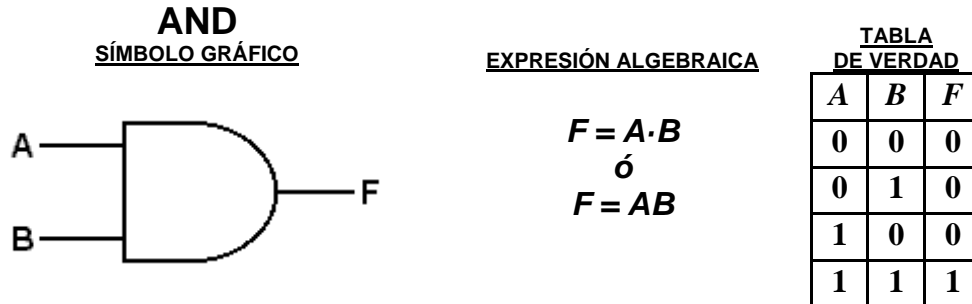
**Estas son las funciones lógicas básicas:**

a) **AND** (*Y*) o *producto lógico*

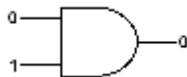
La función AND (*Y*) es 1 si la entrada A es 1 y la entrada B es 1.

El símbolo de operación algebraica para la función AND es el mismo que el símbolo de multiplicación de la aritmética tradicional (podemos usar un punto entre las variables o no colocar ningún símbolo entre ellas).

La función AND puede tener más de dos entradas, y *la salida es 1 si y solo si todas las entradas son 1*.



Ej:

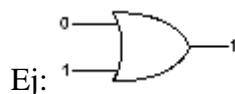
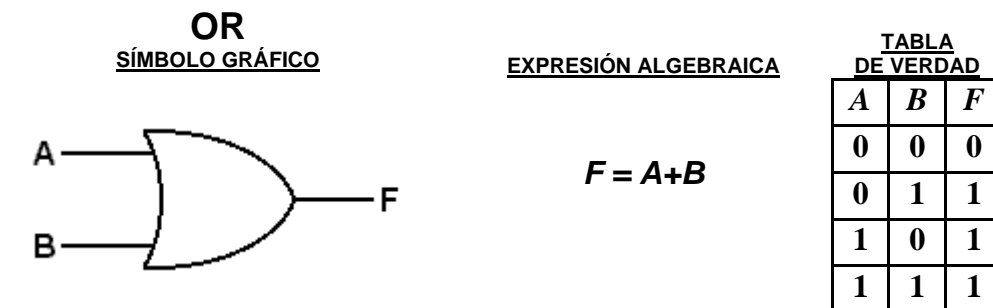


b) **OR (O) o suma lógica**

La función OR (O) (*también llamada OR inclusive*) es 1 si la entrada A es 1 o la entrada B es 1 o ambas son 1.

El símbolo de operación algebraica para la función OR es el mismo que el símbolo de suma de la aritmética tradicional (+).

La función OR puede tener más de dos entradas, y *la salida es 1 si al menos una entrada es 1*.

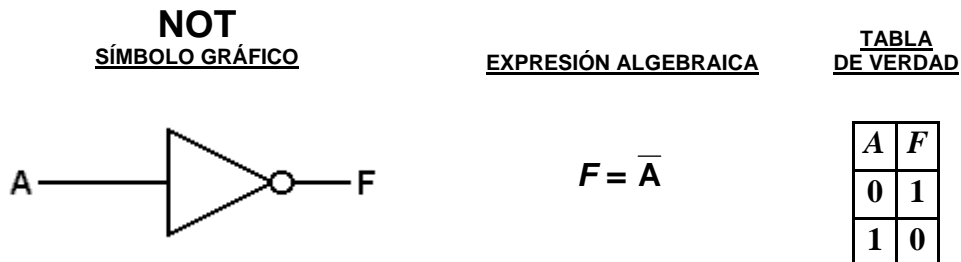


c) **NOT** (*INVERSOR*) o *complemento lógico*

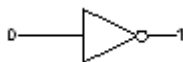
La función NOT (*NO*) invierte la variable de entrada, es decir, cambia ceros por unos y unos por ceros. Esta operación también se conoce como negación o complemento lógico.

El símbolo algebraico que se utiliza para la operación NOT es una barra sobre la variable.

Debe mencionarse que en general, **un círculo indica inversión**, esté o no acompañado de un triángulo en el símbolo gráfico.



Ej:

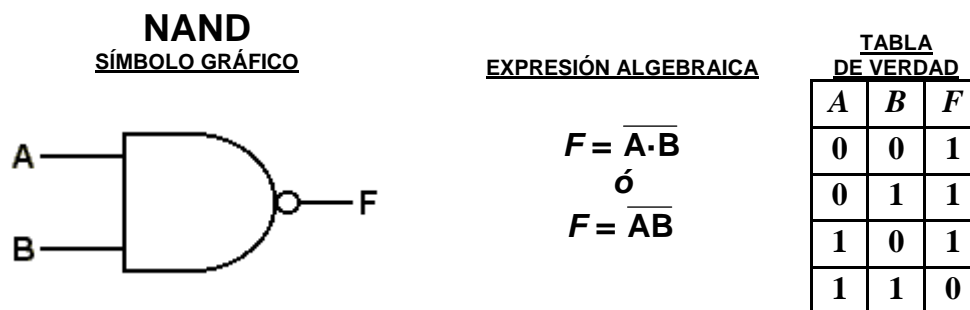


*Estas tres operaciones lógicas constituyen las operaciones lógicas básicas mediante las cuales pueden realizarse las demás. Las restantes son una combinación de las operaciones AND, OR y NOT.*

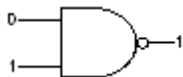
d) **NAND** (*NO-Y*)

La función NAND (*NO-Y*) es 0 si la entrada A es 1 y la entrada B es 1. La función NAND es el complemento de la función AND.

El símbolo gráfico de la función NAND consiste en el símbolo de la función AND, seguido de un círculo, que denota inversión o complemento lógico.

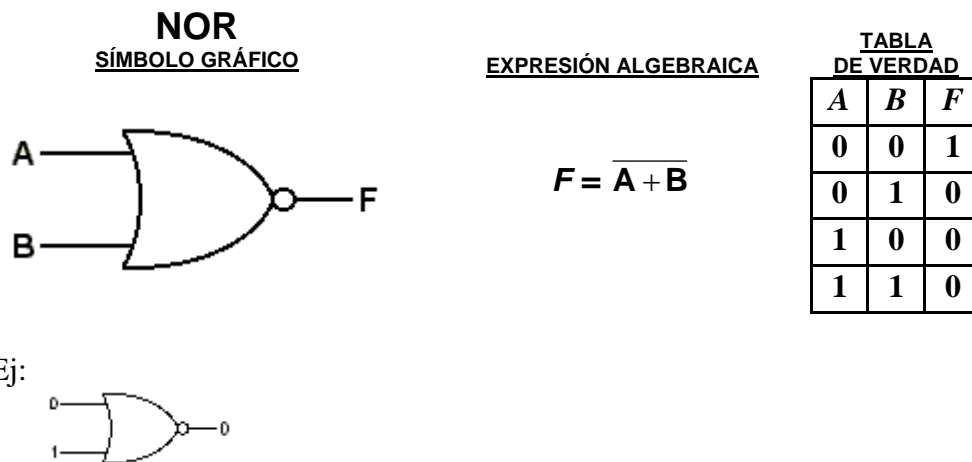


Ej:

e) **NOR** (*NO-O*)

La función NOR (*NO-O*) es 0 si la entrada A es 1 o la entrada B es 1 o ambas son 1. La función NOR es el complemento de la función OR.

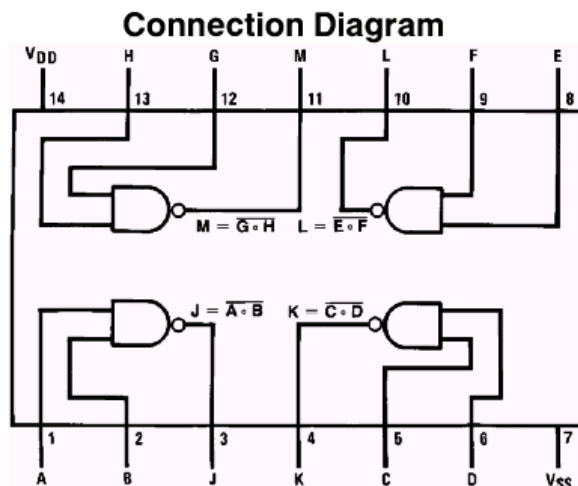
El símbolo gráfico de la función NOR consiste en el símbolo de la función OR, seguido de un círculo.



La información se representa en el interior de las computadoras mediante voltajes eléctricos. Podríamos convenir que cuando el voltaje exceda los 3 volts, el estado lógico sea 1 y que cuando el voltaje sea menor a 0,5 volts, el estado lógico representado sea un cero.

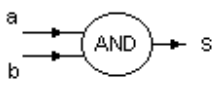
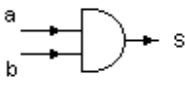
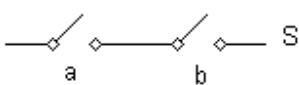
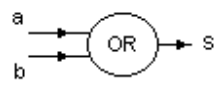
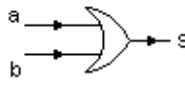
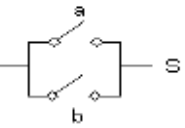

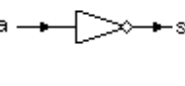
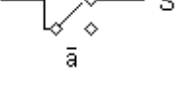

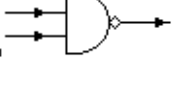

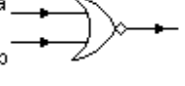

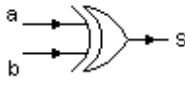
**Las compuertas lógicas son dispositivos electrónicos que trabajan con voltajes eléctricos y que implementan en su interior funciones lógicas.** Las compuertas lógicas más comunes realizan las funciones vistas anteriormente, y tienen los mismos símbolos. Se fabrican chips estándar con grupos de compuertas (normalmente 4 compuertas de dos entradas por chip) y se encapsulan en forma de circuito integrado con 14 pines.

Como ejemplo, vemos la distribución de pines del circuito integrado tipo **CD4011**, compuesto por *cuatro compuertas NAND de dos entradas*:



Las compuertas lógicas pueden combinarse y unirse para formar otras funciones más complejas, formando **circuitos lógicos**.

# TABLA DE SÍMBOLOS

ELEMENTO LÓGICO	SÍMBOLOS DE CIRCUITOS LÓGICOS		SÍMBOLOS DE EXPRESIONES LÓGICAS		INTERRUPTORES LÓGICOS
	SET DE TIPO 1	SET DE TIPO 2	SET DE TIPO 1	SET DE TIPO 2	
AND			$A \wedge B$	$a \cdot b$	
OR			$A \vee B$	$a + b$	
NOT			$\bar{A}$	$\bar{a}$	
NAND			$\overline{(A \wedge B)}$	$\overline{(a \cdot b)}$	
NOR			$\overline{(A \vee B)}$	$\overline{(a + b)}$	
XOR					

## Simplificación de expresiones algebraicas

Las funciones lógicas complejas pueden simplificarse, reduciendo de esta manera el número de operaciones a realizar para obtener el mismo resultado. La simplificación puede realizarse en forma sistemática mediante el empleo de tablas especiales, o algebraicamente, empleando las propiedades del Álgebra de Boole.

Veamos, como ejemplo, la minimización algebraica de la siguiente expresión:

$$f = A\bar{C} + ABC\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}C$$

Primeramente, tomamos el término  $ABC\bar{C}$ , y el término  $A\bar{B}C$ , los que difieren en una variable solamente (la variable B). Sacamos factor común,  $A\bar{C} \cdot (B + \bar{B})$

$$f = A\bar{C} + A\bar{C} \cdot (B + \bar{B}) + \bar{A}C$$

Sabemos que  $B + \bar{B} = 1$ , por lo que la expresión queda  $f = A\bar{C} + A\bar{C} + \bar{A}C$

Tenemos dos términos iguales ( $A\bar{C}$ ), y aplicamos la propiedad de Idempotencia para suprimir uno de ellos.

$$f = A\bar{C} + \bar{A}C$$

Finalmente, vemos que los dos términos resultantes difieren en una variable, sacamos factor común  $\bar{C}$  y simplificamos, sabiendo que  $A + \bar{A} = 1$ .

Símbolo Algebraica	Tabla de Verdad	Función
--------------------	-----------------	---------

**AND**



A	B	x
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$X = A * b \Rightarrow AB$$

**OR**



A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$X = A + B$$

**Inversor (Not)**



A	X
0	1
1	0

$$X = A' \Rightarrow \bar{A}$$

**Separador**



A	X
0	0
1	1

$$X = A$$

**NAND**



A	B	x
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X = (AB)'$$

Símbolo Algebraico	Tabla de Verdad	Función
--------------------	-----------------	---------

### NOR



A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$X = (A + B)'$$

### OR (Exclusivo XOR)



A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X = A \oplus B \Rightarrow \bar{A}B + A\bar{B}$$

### NXOR (Exclusivo, Equivalencia)



A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$X = A \otimes B \Rightarrow \bar{A}\bar{B} + AB$$

### Tabla Resumen de Compuertas Lógicas

Var A	Var B	AND (*) 	NAND 	OR (+) 	NOR 	OR EX ( $\oplus$ ) $\bar{A}B + A\bar{B}$ 	NOREX ( $\otimes$ ) $\bar{A}\bar{B} + AB$ 
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. $\bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$	Sol..- $a \cdot \bar{b} + b \cdot c$
2. $(\bar{a} \cdot b) \cdot (\bar{a} + b) + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b$	Sol..- $b$
3. $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d$	Sol..- $\bar{a} \cdot (b \cdot \bar{c} + c \cdot d)$
4. $a + \bar{a} \cdot b$	Sol..- $a + b$
5. $a \cdot (a \cdot b + a \cdot \bar{b} + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a})$	Sol..- $a$
6. $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$	Sol..- $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + b$
7. $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot d$	Sol..- $a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}$
8. $a \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$	Sol..- $a \cdot b$
9. $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c$	Sol..- $\bar{a} \cdot b + \bar{b} \cdot c$
10. $\overline{(a+b) \cdot (c+a)}$	Sol..- $\bar{a} + \bar{b}$

1) Demostrar las siguientes identidades utilizando los axiomas y teoremas.

- $(a + b)(a + c) = a + b c$
- $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \overline{a b c} = \overline{a b c}$
- $\overline{a b c} + \bar{b}(\bar{a} c + a \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$
- $\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{b} \bar{c} d + a b c + a \bar{b} c \bar{d} = a c (b + d) + \bar{a} \bar{b} \bar{c}$
- $a b c d + a b c \bar{d} + a b \bar{c} d + a b c + a b \bar{c} \bar{d} = a b$
- $\bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c d = \bar{a} (b \bar{c} + c d)$

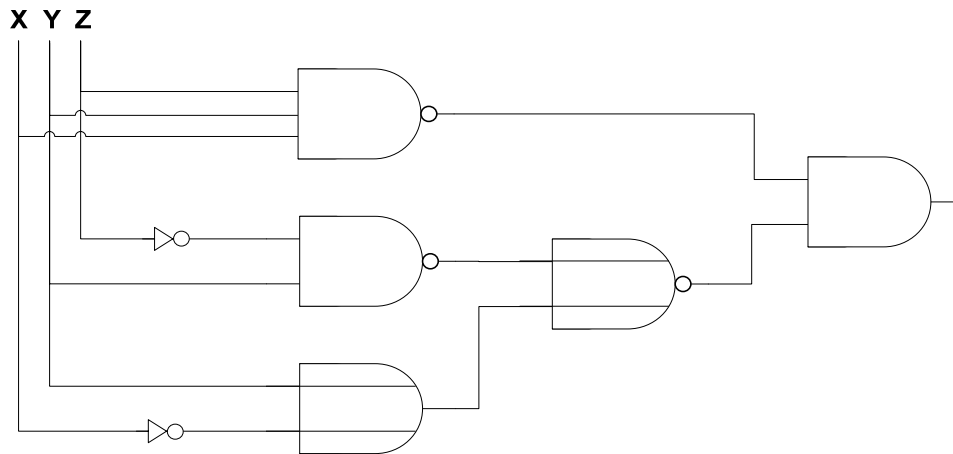
2) Diseñar las tablas lógicas para las siguientes funciones.

- $f(x, y, z) = (\bar{x} + y z) \bar{z} \bar{x}$
- $f(x, y, z) = (x + (\bar{y} z)) z$
- $f(x, y, z) = (x + (\bar{y} + z)) + (((x y) + \bar{z}) x)$
- $f(x, y, z) = (x \oplus y) + x y$
- $f(x, y, z) = (m_1 \cdot m_4) + M_3$
- $f(x, y, z) = (M_0 + M_7) m_5$
- $f(x, y, z, t) = (x + t) \oplus (z \cdot y)$
- $f(x, y, z) = 1$  si y solo si  $(y = 0)$  y  $(x z = 1)$

i.  $f(x, y, z) = 0$  si y solo si  $(x = 0)$  o  $(x + y + z = 0)$

2) Dado el siguiente diagrama lógico

- Obtener su función booleana
- Obtener la forma mínima.



3) Dada la siguiente función booleana:

$$\overline{X+Y+Z} + Z(\overline{X}Y + X\overline{Y}) + \overline{\overline{X} + \overline{Y} + Z}$$

Dibujar el diagrama logico correspondiente.