Curso Iberoamericano de formación permanente de profesores de matemática

Tema 8 (I): Geometría del plano

Tema: Geometría del Plano

En el siglo IV antes de Cristo el profesor y filósofo griego Platón colocó en la entrada de su Academia la inscripción:

"No entre nadie ignorante en Geometría"

Desde esa época hasta nuestros tiempos el estudio de la geometría forma parte de la formación básica de nuestros alumnos.

En este tema presentaremos los principales conceptos y teoremas que caracterizan la geometría del plano. Para facilitar la lectura lo hemos dividido en dos partes, la primera contiene las lecciones de la 1 a la 7 y la segunda de la 8 a la 11.

***Lecciones de este tema*:**

Parte I

- *Lección 1: Nociones preliminares*
- *Lección 2: Ángulos*
- *Lección 3: Paralelas, secantes y perpendiculares*
- *Lección 4: Polígonos*
- *Lección 5: Triángulos*
- *Lección 6: Cuadriláteros*
- *Lección 7: Perímetros y áreas*

Parte II

- *Lección 8: Semejanza*
- *Lección 9: Más sobre triángulos rectángulos*
- *Lección 10: Circunferencia y círculo*
- *Lección 11: Transformaciones geométricas en el plano*

Bibliografía:

BRUÑO G. M. (1978). *Geometría. Curso Superior*. Bruño: Madrid.

CLEMENS S.; O' DAFFER, P.; COONEY T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison-Wesley Iberoamericana: México.

GODINO, J.; RUIZ F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros*. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

ROANES MACIAS E. (1979). *Introducción a la Geometría*. Anaya: Madrid

Lección 1: Nociones preliminares

Contenido de este documento:

Introducción
Punto, recta, plano y espacio
Objeto de la geometría
Breve recorrido histórico
Importancia histórica del postulado de las paralelas
Recordando las conceptos elementales de la geometría

Introducción

¿Cómo podrían describirse un punto, una recta, un plano, el espacio?

Estos cuatro conceptos son muy importantes en el estudio de la geometría. No vamos a definirlos, sino que se observarán objetos que los sugieren para establecer su existencia, luego se les atribuirán ciertas propiedades irrefutables que llamaremos axiomas o postulados y, una vez definidas las figuras geométricas, se deducirán las propiedades de las mismas.

Punto, recta, plano y espacio

Los objetos que nos rodean nos dan una idea intuitiva de estos conceptos: Si desplazamos rápidamente un punto luminoso (bombilla pequeña encendida) percibimos una línea luminosa. Se dice que un punto, al desplazarse, engendra una línea. Una línea está formada por un conjunto ordenado de puntos. Si desplazamos rápidamente una línea luminosa en una dirección que no sea la suya, percibimos una franja luminosa, una superficie luminosa. Se dice que una línea al desplazarse engendra una superficie. Una superficie está formada por un conjunto de líneas. Si desplazamos rápidamente una superficie en una dirección distinta de las que contiene, percibimos la forma de un sólido. Se dice que una superficie al desplazarse, engendra un sólido. Un sólido puede considerarse como formado por un conjunto de superficies.

La porción de espacio que ocupa un cuerpo se llama **extensión volumétrica** del cuerpo, tiene tres dimensiones. La porción de espacio que ocupa una superficie se llama **extensión superficial,** tiene dos dimensiones. La que ocupa una línea se llama **extensión lineal**, tiene una dimensión. Como el punto puede considerarse como cuerpo o superficie o parte de línea infinitamente pequeños, se dice que el punto no tiene dimensión.

Objeto de la geometría

El objeto de la geometría es el estudio de las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma, extensión y relaciones que guardan entre sí.

Se divide en dos partes:

- **geometría plana**, que estudia las figuras planas, esto es, aquellas cuyos puntos están en un mismo plano
- **geometría del espacio** que trata de las figuras cuyos puntos no están en el mismo plano.

Este tema lo dedicaremos al estudio de la geometría plana.

Vocablos matemáticos

En matemáticas se emplean algunas voces, con las cuales conviene habituarse lo antes posible. Veamos las más utilizadas:

<u>Proposición</u>: Enunciado de una *hipótesis*, o *suposición*, y de una *tesis*, o *conclusión*, consecuencia de la hipótesis.

<u>Axioma</u>: Proposición evidente en sí misma y que, por tanto, no necesita demostración.

<u>Teorema</u>: Proposición que para ser evidente necesita demostración.

<u>Postulado</u>: Proposición cuya verdad se admite sin pruebas, aunque no tiene la evidencia del axioma.

<u>Corolario</u>: Es un teorema cuya verdad se deduce de otro ya demostrado.

Breve recorrido histórico

El vocablo **geometría** procede del griego: geo (tierra) y metrón (medida). Según Herodoto, la geometría empírica nació en el antiguo Egipto, dada la necesidad de medir las tierras que desaparecían o se formaban a causa de los desbordamientos del Nilo. Este origen es incierto, ya que pudo haber nacido en otros lugares y por motivos diferentes, tales como, fines decorativos, etc. En cualquier caso, la geometría siempre se ha utilizado de un modo práctico, basta recordar los tensadores de cuerdas egipcios que utilizaban la cuerda de los 12 nudos para trazar ángulos rectos en el terreno.

En la Grecia clásica la geometría sufrió un proceso de abstracción y generalización, dejó de ocuparse de la medida de la tierra para pasar a interesarse por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones de dichos componentes, con lo que pasó a ser un campo de trabajo de filósofos, matemáticos y pensadores. Éstos la organizaron de forma eminentemente deductiva, es decir, en una disciplina donde las reglas y leyes geométricas no se inducen de la observación de una multitud de casos particulares, sino que se establecen deductivamente mediante un razonamiento lógico.

Euclides

Especial mención hay que hacer al trabajo de Euclides (siglo III a. C), sabio alejandrino que publicó numerosas obras científicas destacándose entre ellas los célebres **Elementos**.

Los *Elementos* constan de 13 libros y son, en gran parte, una recopilación de trabajos realizados por los matemáticos que precedieron a Euclides. Pero esto no le resta nada de valor, pues su gran mérito reside en la inteligencia con que se seleccionaron las proposiciones que lo forman, y se dispusieron lógicamente a partir de un pequeño grupo de suposiciones y postulados iniciales.

En el *libro I* de los *Elementos* aparecen 23 definiciones, 5 postulados y 9 nociones comunes. Con ellos se establecen rigurosamente 48 teoremas entre los que cabe destacar los relativos a la congruencia, a las rectas paralelas y a las figuras rectilíneas, así como los teoremas 47 y 48, que establecen el teorema de Pitágoras y su recíproco.

Por interés histórico mostramos los axiomas y postulados que aparecen en el *libro I*:

Los axiomas o nociones comunes

- Las cosas que sean iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.
- Si a cantidades iguales se suman otras también iguales, los totales serán iguales.
- Si se restan cantidades iguales de otras también iguales, los residuos serán iguales.
- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
- El todo es mayor que una parte.

Los cinco postulados son:

P1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.
P2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
P3. Hay una única circunferencia con un centro y radio dados.
P4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
P5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en ese mismo lado.

Importancia histórica del postulado de las paralelas

La formulación original del quinto postulado es confusa por lo que se suele enunciar como: **Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.** Es conocido como el postulado de las paralelas y afirma, pues, dos cosas:

- La existencia de una recta que pasa por el punto y que es paralela a la recta dada.
- Que esta recta es única.

Durante siglos, los matemáticos intentaron demostrar que el postulado de las paralelas era un teorema. Tales intentos fallaron una y otra vez.

A principios del siglo XIX, y de modo independiente, Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856) y János Bolyai (1802-1860) intentaron separar el postulado de las paralelas del sistema euclidiano de postulados y probar que era un teorema. En lugar de obtener una contradicción encontraron que esta suposición representaba un conjunto totalmente nuevo de teoremas, dando lugar a geometrías coherentes, diferentes de la euclídea. Este importante descubrimiento matemático dio lugar a lo que hoy se conoce como «geometrías no euclídeas».

Aunque Gauss fue el primero en sospechar que podría formularse un quinto postulado distinto, no publicó nada.

En la geometría euclídea la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. En la geometría que obtuvo Lobachevsky, conocida como «geometría hiperbólica», la suma es menor que 180º. En la «geometría elíptica», desarrollada por Bernhard Riemann (1826-1866) la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de 180º.

Recordando los conceptos elementales de la geometría

Línea recta

Fig. 1

Un hilo bien tenso entre dos puntos A y B nos da la noción intuitiva de **segmento rectilíneo**. Dejando A fijo y desplazando B de manera que la distancia AB aumente más y más llegamos a la idea intuitiva de **semirrecta**, desplazando del mismo modo A en sentido contrario a B, llegamos a la idea intuitiva de **recta.**

Posee las características siguientes:

- Dos puntos bastan para determinarla
- Es ilimitada en los dos sentidos

Sentido en la recta. Eje orientado

Dados en una recta dos puntos A y B, si señalamos cuál de ellos debe preceder al otro, determinamos dos sentidos o modos opuestos de recorrer la recta. En la práctica estos dos sentidos se distinguen con los signos + y -.

Una recta indefinida en la cual se elige un sentido **positivo** se llama **eje orientado**. El sentido opuesto será el **negativo**.

Vector

Un segmento rectilíneo en el que se determina la **longitud**, **dirección** y **sentido**, se llama vector. El primer punto A se llama origen, y el último, B, se llama extremo. Se designa enunciando antes el origen que el extremo.

Fig. 2

Se entiende por módulo de un vector, la longitud del segmento AB.

Sea A (a_1, a_2) y B (b_1, b_2); la longitud (distancia entre A y B) se calcula como:

$$d= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

La dirección del vector es la del eje al que pertenece, esto es, lo que tiene de común este eje con todas las rectas que le son paralelas.

El sentido del vector se entiende como el sentido del movimiento que llevaría un móvil que se desplazase desde el origen del vector hasta el extremo del mismo.

División de una recta por un punto

Todo punto A divide a una recta en dos partes, llamadas semirrectas, las cuales no tienen más punto en común que el punto A, llamado origen de las semirrectas, dichas semirrectas están formadas: la una por el punto A y todos los que le siguen en un cierto sentido, y la otra por el mismo punto A y todos los que le preceden.

Fig. 3

Las dos semirrectas en que A divide a la recta tienen las propiedades siguientes:

- Un segmento, tal como CB, que une dos puntos de una misma semirrecta, distintos del A, es un segmento que no contiene al A
- Un segmento tal como el BD, que une dos puntos de distinta semirrecta, contiene al punto A.

Postulados de la línea recta

La definición geométrica de línea recta viene dada por los principios siguientes:

Fig. 4

1. Si C pertenece a AB, no pertenece B a AC ni A a BC
2. Si C pertenece a AB, todo punto de AC pertenece a AB (todo punto de BC pertenece a AB).
3. Si C pertenece a AB, todo punto de AB pertenecerá a AC o a BC

Se define como **prolongación** del segmento AB por el extremo B, el conjunto de todos los puntos D, tales que B pertenezca al segmento AD.

Definición Recta es el conjunto de los puntos de un segmento AB más los de sus dos prolongaciones AB y BA.

Si dos rectas se cortan, se cortarán en un solo punto, llamado punto de intersección. Las rectas AB y CD tienen solo un punto en común, que es el punto P.

Representaremos el punto por la intersección de dos rectas.

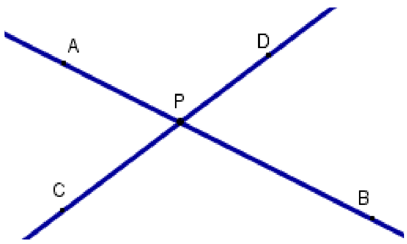


Fig. 5

Definición **Línea curva** es aquella que no incluye segmento alguno recto por pequeño que se le suponga, como la línea AB.

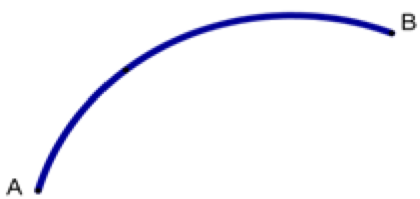


Fig. 6

Una línea curva se dice cerrada cuando sus extremos coinciden; arco es una parte de línea curva limitada por sus extremos.

Definición

Línea quebrada o poligonal, es la que se compone de dos o más segmentos rectilíneos, de modo que dos segmentos consecutivos estén en distinta dirección y tales que el extremo de uno de ellos sea el origen del siguiente.

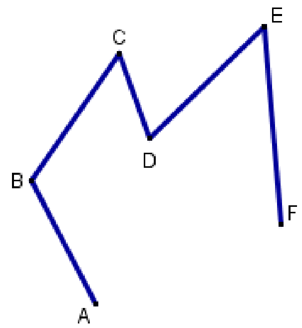


Fig. 7

El origen del primer segmento y el extremo del último se llaman extremos de la poligonal, y los distintos segmentos que la componen se llaman lados. Si los extremos coinciden, se dice que la línea quebrada es cerrada si no, es abierta.

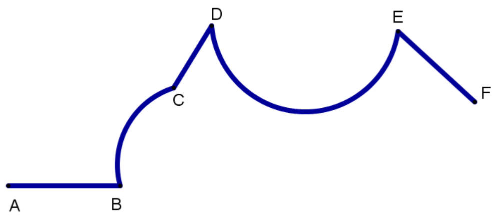


Fig. 8

Se llama **línea mixta** la que se compone de uno o más segmentos rectilíneos y de uno o más segmentos curvilíneos que tienen de dos en dos un solo punto común.

Plano

La noción de superficie plana o plano es intuitiva; una hoja de papel proporciona una buena imagen de un plano, salvo por el hecho de que la hoja termina en unos bordes, mientras que un plano será una superficie ilimitada. Si apoyamos la hoja en una mesa, la superficie de la mesa representa una porción más amplia del mismo plano que representa la hoja.

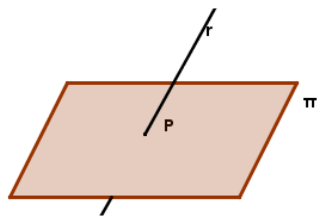


Fig. 9

El plano es ilimitado en todas sus direcciones.

Definición

Se llama **semiplano** a cada una de las dos partes en que una recta del plano lo divide. Dicha recta se llama **borde del semiplano.**

Superficie curva es la que en toda su extensión no presenta parte alguna plana, por ejemplo, una esfera, un balón, un globo hinchado.

Superficie poliédrica es la superficie formada por distintos polígonos planos de dos en dos consecutivos y no coplanarios. Por ejemplo, la superficie de una pirámide triangular.

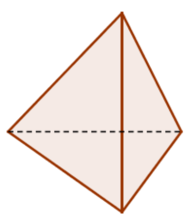


Fig. 10

Superficie mixta es la que se compone de parte o partes planas y de una parte o partes curvas. Por ejemplo la superficie de una sala abovedada o de una lata de conservas.

Postulados del plano:

- Fuera de toda recta existe al menos un punto.
- Si una recta tiene dos puntos en un plano, tiene todos sus puntos en dicho plano.
- Todo plano divide al espacio en dos regiones situadas a distinto lado del plano. Cada una de ellas se llama semiespacio.
- Tres puntos no alineados determinan un plano.
- Una recta y un punto fuera de ella, o dos rectas que se cortan, determinan un plano.

Lección 2: Ángulos

Contenido de este documento:
Ángulos: definiciones y medida
Ángulo cóncavo y convexo
Congruencia de ángulos
Ángulos consecutivos
Ángulos adyacentes
Suma de ángulos
Ángulos complementarios y suplementarios
Bisectriz de un ángulo
Ángulos opuestos por el vértice
Sustracción de ángulos
Multiplicación y división de ángulos
Medida de ángulos

Ángulos: definiciones y medida

Definición	Un **ángulo plano** es una cualquiera de las dos regiones del plano determinadas por dos semirrectas de mismo origen. Las semirrectas reciben el nombre de **lados** y el punto común se llama **vértice.**

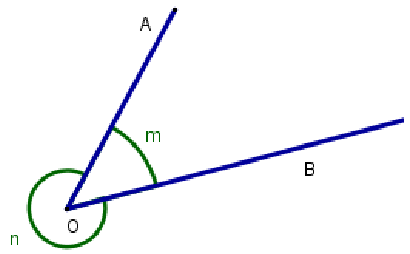


Fig. 1

Un ángulo se designa de varios modos:

- Mediante tres letras, una en cada lado y otra en el vértice, leyendo siempre la del vértice en medio: Ángulo AOB ó $\angle AOB$
- Con una sola letra en el vértice: $\hat{0}$
- Con una letra minúscula o un número colocado en el interior del ángulo: $\hat{m}$

Los ángulos AOB y BOA (*Fig. 1*) tienen sentido contrario. El ángulo que forman el horario y minutero de un reloj en su marcha ordinaria tiene sentido negativo y, el que forma en sentido contrario a su marcha es positivo.

Ángulo cóncavo y convexo

Definición

Las semirrectas OA y OB (fig. 2) dividen al plano en dos regiones, la región **m**, que no contiene a las prolongaciones de dichas semirrectas se llama **ángulo convexo** y la región **n** que las contiene se llama **ángulo cóncavo.** [1]

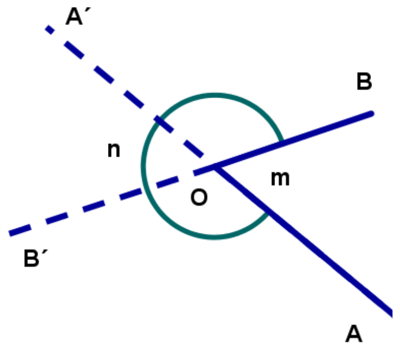


Fig. 2

Ángulo llano

Cuando las dos semirrectas OA y OB son opuestas, cada una de las regiones del plano se llama ángulo llano.

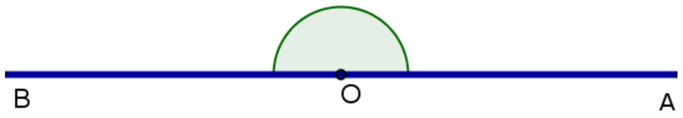


Fig. 3

Definición

Decimos que dos ángulos son **congruentes**[2] cuando pueden colocarse uno sobre otro, de manera que coincidan sus vértices y sus lados.

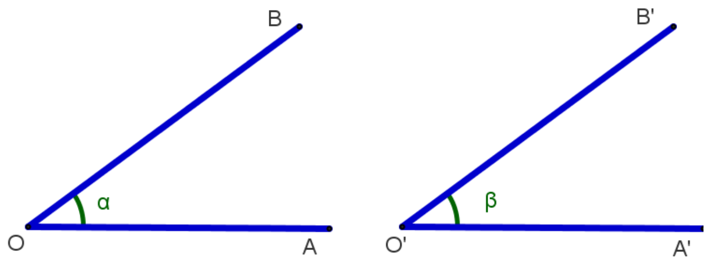


Fig. 4

---

1 Salvo indicación contraria nos referimos siempre al ángulo convexo.

[2] Utilizaremos indistintamente los términos congruencia e igualdad.

Definición Dos ángulos se llaman **consecutivos** cuando tienen el mismo vértice y están situados a distinto lado de un lado común. Tres o más ángulos son consecutivos cuando cada uno es consecutivo con su inmediato.

Por ejemplo: $\widehat{m}$, $\widehat{n}$, $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, en la fig. 5.

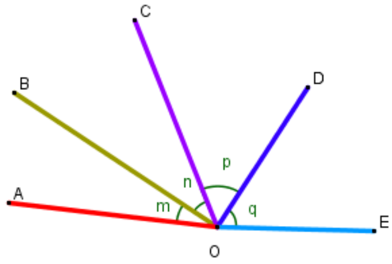


Fig. 5

Definición Se llaman **ángulos adyacentes** a dos ángulos consecutivos que tienen los lados no comunes en línea recta. Dos ángulos adyacentes forman un ángulo llano. Cuando son iguales, cada uno de ellos se llama **ángulo recto**.

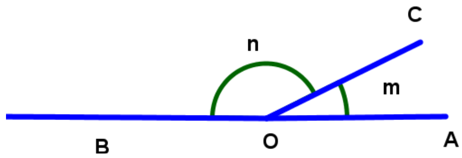


Fig. 6

Un ángulo recto es, pues, igual a la mitad de un ángulo llano.

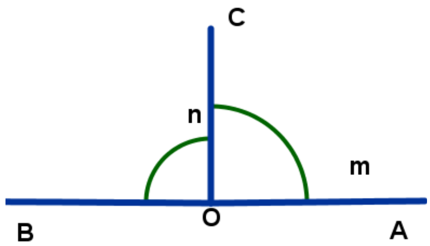


Fig. 7

Un ángulo oblicuo es cualquiera de los ángulos adyacentes desiguales, pueden ser **agudos** cuando son menores que un recto y **obtusos** cuando son mayores que un recto. El $\widehat{m}$ de la figura 6 es agudo y el $\widehat{n}$, obtuso.

Todo ángulo convexo es menor que uno llano y todo ángulo cóncavo es mayor que uno llano.

Cuando dos rectas se cortan formando un ángulo recto se dice que son perpendiculares.

Suma de ángulos

Definición Se llama suma de dos o más ángulos **consecutivos** al ángulo que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del último.

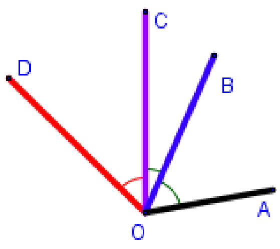


Fig. 8

Se llama suma de dos o más ángulos **cualesquiera** a la suma de dos o más ángulos consecutivos, congruentes a los ángulos dados.

En la figura 9 se observa la suma de los ángulos $\widehat{m}$, $\widehat{n}$ y $\widehat{p}$.

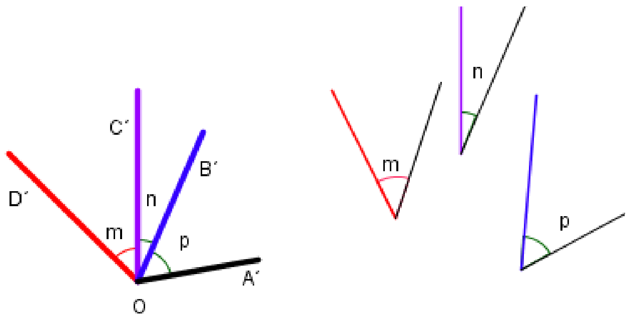


Fig. 9

Para que la adición de ángulos sea posible en todos los casos es necesario admitir la existencia de ángulos superiores a un giro (360º), es decir, ángulos compuestos de un ángulo ordinario más uno o varios giros. Para hacernos una idea de esta ampliación podemos considerar el ángulo como engendrado por uno de sus lados girando alrededor del vértice dando una o más vueltas y además parte de vuelta, en uno u otro sentido.

Definición Dos ángulos son **complementarios** cuando su suma es igual a un ángulo recto, y **suplementarios** cuando su suma es igual a dos ángulos rectos o a un ángulo llano.

Para hallar el complementario de un ángulo, basta trazar por el vértice del mismo una semirrecta perpendicular a uno cualquiera de los lados quedando el ángulo dado dentro del recto que se forma.

En la figura 10 el complementario del ángulo $\angle AOB$ es el ángulo $\angle BOC$.

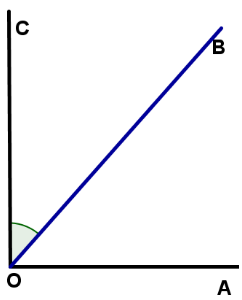


Fig. 10

Para hallar el suplementario de un ángulo se traza la semirrecta opuesta a uno cualquiera de los lados, y el ángulo convexo formado por esta semirrecta y el otro lado es el suplementario.

En la figura 11, $\angle BOC$ es suplementario de $\angle AOB$; también es suplementario de $\angle AOB$, $\angle DOA$

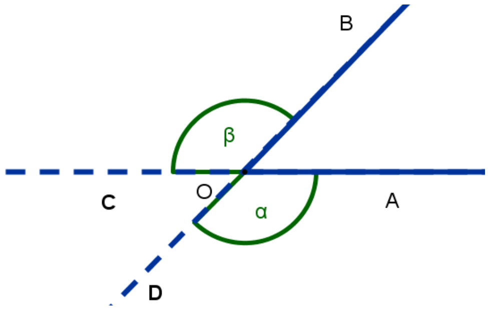


Fig. 11

Bisectriz de un ángulo

Definición

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que, partiendo del vértice, divide al ángulo en dos partes iguales.

En la figura 12 la bisectriz es la recta MN.

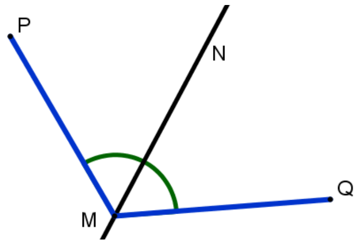


Fig. 12

Teorema 1

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares

Demostración

Sean OD y OE las bisectrices de los ángulos adyacentes AOC y COB.

En la figura 13 tenemos que:

$2\hat{a} + 2\hat{b} = 180°$

de donde $\hat{a} + \hat{b} = 90°$ ■

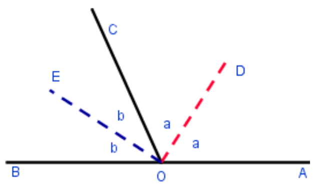


Fig. 13

Ángulos opuestos por el vértice

Definición

Dos ángulos convexos son **opuestos por el vértice** cuando los lados del uno son las semirrectas opuestas a los lados del otro.

Teorema 2 Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Demostración

Sean los ángulos $\hat{m}$ y $\hat{n}$. Considerando la recta AB, el ángulo $\hat{n}$ tiene por suplementario el ángulo $\hat{p}$, y si consideramos la recta CD, el ángulo $\hat{m}$ tiene por suplementario el mismo ángulo $\hat{p}$. Por tanto los ángulos $\hat{m}$ y $\hat{n}$ serán iguales, por tener el mismo ángulo suplementario. ■

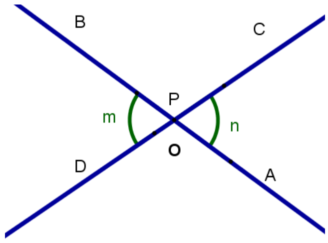


Fig. 14

Teorema 3 Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.

Demostración

Sean los ángulos opuestos por el vértice $\angle AOC$ y $\angle BOD$. Tracemos las bisectrices OG y OH, demostremos que dichas bisectrices están en línea recta.

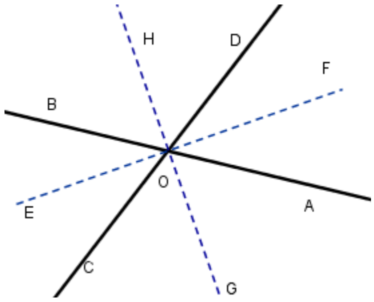


Fig. 15

Trazando la bisectriz del ángulo $\angle AOD$, tendremos que las bisectrices OH y OF de los ángulos suplementarios $\angle AOD$ y $\angle BOD$ serán perpendiculares entre sí (Ver teorema 1). Asimismo lo serán también las bisectrices OG y OF de los ángulos suplementarios $\angle AOD$ y $\angle AOC$. Por consiguiente, los ángulos $\angle FOH$ y $\angle FOG$ serán suplementarios y los lados no comunes estarán en línea recta. ■

Corolario: *Las bisectrices de los cuatro ángulos que forman dos rectas al cortarse constituyen dos rectas perpendiculares entre sí.*

Sustracción de ángulos

Para que la sustracción de ángulos sea posible en todos los casos, es necesario tener en cuenta el ángulo de amplitud nula, esto es, el ángulo que forma una semirrecta consigo misma, y las amplitudes negativas, susceptibles de ser representadas geométricamente al considerar los ángulos orientados.

Así, por ejemplo, entre los ángulos orientados de la figura 16 se tendrá:

$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$

$\angle AOC - \angle BOC = \angle AOC + \angle COB = \angle AOB$

para cuya interpretación hay que tener en cuenta que la notación $\angle AOC$ representa el ángulo que tiene por origen AO y OC por extremo, siendo, por tanto, los ángulos sumandos de la primera igualdad de sentido contrario, el primero positivo y el segundo negativo.

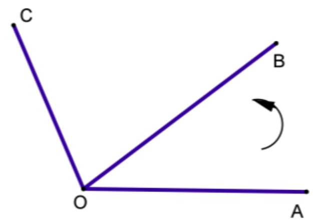


Fig. 16

Multiplicación y división de ángulos

Definición	Multiplicar un ángulo por un número n es hallar la suma de n ángulos iguales al dado.

Inversamente, todo ángulo se puede dividir en n partes iguales, siendo n un número entero cualquiera; si bien esta división no podrá hacerse con regla y compás de un modo exacto, salvo en casos determinados.

Uno de los problemas que más han llamado la atención de los geómetras de todos los tiempos ha sido el de la trisección del ángulo con sólo regla y compás. Es uno de los problemas irresolubles junto a la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Medida de ángulos

Se llama razón de dos ángulos al número abstracto por el cual hay que multiplicar el segundo para que nos dé el primero. La medida de un ángulo con otro que se toma por unidad, será la razón entre el ángulo que se mide y esa unidad de medida.

Existen varias unidades de medida de ángulos.

- ✓ Como *unidades principales* suelen usarse el giro o ángulo completo, el ángulo llano (mitad del giro), y el cuadrante o ángulo recto (mitad del llano).

- ✓ Como *unidades secundarias* suelen usarse tres sistemas:

    - Sistema **sexagesimal**. El **grado sexagesimal** es $\frac{1}{360}$ parte del giro. El minuto sexagesimal es la $\frac{1}{60}$ parte del grado y el segundo sexagesimal es la $\frac{1}{60}$ parte del minuto. Notación: un ángulo de 37 grados 26 minutos 12 segundos, se denota como 37º 26′ 12′′.

- Sistema **centesimal**. El grado centesimal es la $\frac{1}{100}$ parte del ángulo recto. El minuto centesimal es la $\frac{1}{100}$ parte del grado y el segundo centesimal es la $\frac{1}{100}$ parte del minuto. Notación: un ángulo de 39 grados 23 minutos 47 segundos centesimales se denota como $39^g\ 23^m\ 47^s$ o bien $39{,}2347^g$

- Sistema **mixto**: se tiende a expresar los ángulos en grados sexagesimales y en fracciones decimales de grado sexagesimal.

Ejemplo: 53° 15′ 28′′ se escribe también 53,2577778°, bastará con pasar los segundos a minutos dividiendo entre 60 (28/60= 0.4666667), todos los minutos (15+0.4666667=15.4666667) ahora los pasamos a grados dividiendo de nuevo por 60 (15.47/60=0.2577778). El número total de grados será entonces 53.2577778. Para el paso contrario tomaremos la parte decimal y multiplicando por 60 (0.2577778·60= 15.466668) tendremos minutos y si queda de nuevo parte decimal, ésta por 60 tendremos segundos (0.466668·60= 28.00000)

En trigonometría y en física se expresan los ángulos en radianes. Un ángulo sobre una circunferencia mide un radián si el arco que corresponde al ángulo tiene la misma longitud del radio de la circunferencia.

Como la longitud ***L*** *de la circunferencia es $L = 2\pi r$, quiere decir que a lo largo de la circunferencia el radio se repite 2π veces por lo que la circunferencia es un ángulo de 2π radianes y se representará por 2π rad.*

Teniendo en cuenta lo anterior, es fácil comprender la equivalencia de los 360° y los 2π radianes y, en consecuencia, 180° es equivalente a π radianes y con ello la regla de tres (proporción) que permite transformar unas unidades en otras.

Lección 3: Paralelas, secantes y perpendiculares

Contenido de este documento:

Perpendiculares

Paralelas

Ángulos formados por una recta secante a otras dos

Perpendiculares

Definición Se dice que dos rectas r y s son perpendiculares, si se cortan formando ángulos rectos. Para indicar que r es perpendicular a s, se escribe **r ⊥ s.**

Teorema 1 Por un punto situado en una recta puede trazarse **una** perpendicular y **sólo una**.

Demostración

Sea una recta cualquiera y tomemos en ella dos puntos M y N. Sea O un punto cualquiera de ella.

Tracemos por O una semirrecta cualquiera OC.

Si los ángulos $\angle COM$ *y* $\angle CON$ *son iguales, OC es por definición perpendicular a MN, si son desiguales uno de ellos será inferior al otro; supongamos*

$$\angle CON < \angle COM$$

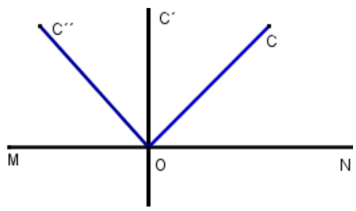


Fig. 1

Si hacemos girar OC alrededor de O de manera que $\angle CON$ *aumente,* $\angle COM$ *irá disminuyendo. Existe una posición OC′ de OC para la cual el ángulo*

$$\angle C'ON = \angle C'OM$$

y la semirrecta OC′ es perpendicular a MN. Luego en el punto O ***existe una*** *perpendicular a MN.*

Sólo existe una*, pues sólo hay una posición OC′ de OC para la cual los ángulos* $\angle C'OM$ *y* $\angle C'ON$ *son iguales.* ■

Teorema 2 Por un punto **exterior** a una recta puede trazarse a dicha recta una perpendicular, y sólo una.

Demostración

Puede trazarse una perpendicular. *Sea la recta AB; P un punto exterior a ella y P' el punto que coincidirá con P, al doblar el semiplano superior girando sobre AB.*

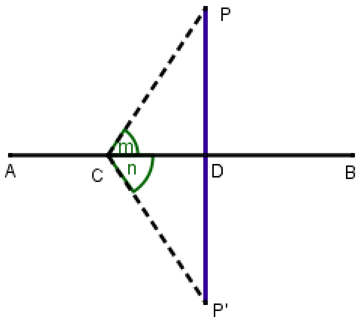


Fig. 2

La recta PP' es perpendicular a la recta dada AB.

En efecto: en el giro, los ángulos $\angle PDA$ *y* $\angle P'DA$ *coinciden, siendo por tanto iguales, y como son adyacentes, las rectas PP' y AB son perpendiculares entre sí.*

Sólo se puede trazar una. *Supongamos que otra cualquiera PC, por ejemplo, fuera perpendicular a AB; entonces* $\hat{m}$ *será recto.*

Tracemos CP' y llamemos $\hat{n}$ *al ángulo que forma con AB.*

Giremos CP alrededor de CB. Al superponer el semiplano superior con el inferior, los ángulos $\hat{m}$ *y* $\hat{n}$ *coincidirán, y como el* $\hat{m}$ *es recto, lo será también* $\hat{n}$*, y siendo adyacentes, los lados PC y P'C deberán estar en línea recta, lo cual es imposible porque entre dos puntos sólo se puede trazar una recta.*

Por consiguiente, por el punto P sólo se puede trazar una perpendicular a la recta AB, como queríamos demostrar. ■

Definición Dados una recta **r** y un punto **A** fuera de ella, el segmento AB de la perpendicular trazada desde A a la recta se llama **segmento perpendicular** ó perpendicular desde A a r. El punto B recibe el nombre de **pie** de la perpendicular.

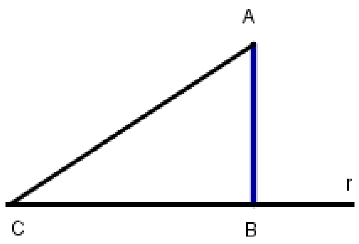


Fig. 3

Otro segmento que una el punto A con otro punto cualquiera de r, se llama **oblicua** trazada por A a la recta y, los puntos de intersección de la misma con la recta se llaman **pie** de la oblicua correspondiente (por ejemplo, C).

Teorema 3 Si desde un punto exterior a una recta se trazan a ésta un segmento perpendicular y varios oblicuos:

1) El segmento perpendicular es menor que cualquiera de los oblicuos.
2) Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie del perpendicular son iguales.
3) De dos oblicuos cuyos pies distan desigualmente del pie del perpendicular, el mayor es aquel cuyo pie dista más.

Demostración

1) Decimos que $\overline{AB} < \overline{AC}$

En efecto, si prolongamos el segmento perpendicular hacia el semiplano inferior, una longitud $\overline{BA'} = \overline{BA}$ y trazamos el segmento oblicuo CA′, los triángulos ABC y A´BC son congruentes, por tener un ángulo igual ($\widehat{m}$ = $\widehat{m}´$) comprendido entre lados respectivamente congruentes:

($\overline{AB} = \overline{A'B}$ por construcción) y $\overline{BC}$ común a los dos;

por tanto, $\overline{AC} = \overline{A´C}$ entonces:

$$\overline{AB} + \overline{A´B} < \overline{AC} + \overline{A´C} \Rightarrow 2\,\overline{AB} < 2\overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} < \overline{AC}$$

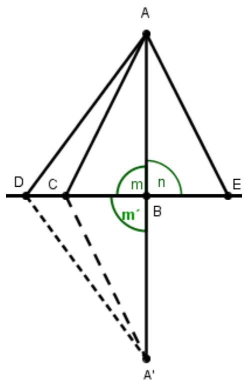


Fig. 4

Si $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$ son dos segmentos oblicuo tales que $\overline{BC} = \overline{BE}$, se cumple que $\overline{AC} = \overline{AE}$

En efecto, los triángulos rectángulos ABC y ABE que tienen un ángulo igual, comprendido entre lados respectivamente iguales

(BC = BE y AB común), serán congruentes, por consiguiente,

$$\overline{AC} = \overline{AE}$$

3) Si consideramos los oblicuos AE y AD, situados a distinto lado del perpendicular, siendo BD > BE, decimos que $\overline{AD} > \overline{AE}$

En efecto, tomemos $\overline{BC} = \overline{BE}$, tracemos $\overline{AC}$ y se tendrá por (2)

$\overline{AC} = \overline{AE}$. Como el punto C es interior al triángulo ADA′, será:

$$\overline{AC} + \overline{A´C} < \overline{AD} + \overline{A´D}$$

Pero los oblicuos AC, A′C, AD y A′D, trazados desde los puntos C y D, tienen sus pies A y A´, a igual distancia del pie perpendicular DB; por tanto: $\overline{AC} = \overline{A'C}$ y $\overline{AD} = \overline{A'D}$, Y la desigualdad anterior se transformará en esta otra $2\overline{AC} < 2\,\overline{AD} \Rightarrow \overline{AC} < \overline{AD}$ y por ser

$\overline{AC} = \overline{AE}$, $\overline{AD} > \overline{AE}$ ■

Distancia de un punto a una recta

Definición Se llama **distancia** de un punto a una recta a la longitud del segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta. Este segmento es la distancia más corta que hay entre un punto y un punto cualquiera de la recta.

Paralelas

Definición Se llaman **rectas paralelas** las que situadas en un mismo plano no tienen ningún punto en común.

Teorema 4 Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

Demostración

Sean AB y CD dos perpendiculares a la recta EF. Si AB y CD no fuesen paralelas tendrían un punto común O, y desde este punto se podrían trazar dos perpendiculares a una misma recta EF, lo cual es imposible por el teorema 2. ■

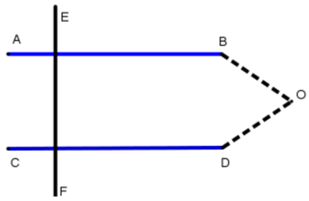


Fig. 5

Corolario 1 Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a esta recta

Demostración

Si por C, exterior a la recta AB trazamos la recta CD, perpendicular a la AB, y la CE, perpendicular a la CD, esta última perpendicular será paralela a la AB, en virtud del teorema anterior. ■

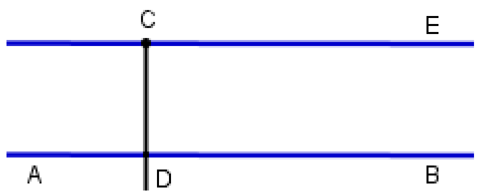


Fig. 6

Postulado de Euclides: Por un punto exterior a una recta no se puede trazar más que una paralela a esta recta. Este postulado se admite sin demostración, como si fuera un axioma.

Como ya dijimos, las Geometrías que no admiten el postulado de Euclides se conocen con el nombre de no euclídeas. Así, Riemann no admite que por un punto exterior a una recta se pueda trazar paralela alguna y Lobachevsky admite la existencia de más de una paralela por un punto exterior a una recta.

Corolario 2

Si dos rectas son paralelas, toda recta EF que corte a una de ellas, cortará también a la otra.

Demostración

Porque si no la cortara, le seria paralela, y por el punto E se podrían trazar dos paralelas a la recta AB, lo cual es imposible por el postulado anterior. ■

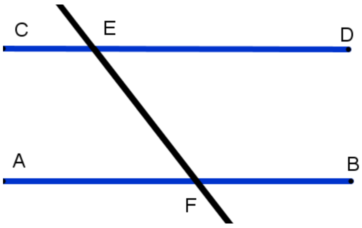


Fig. 7

Corolario 3

Si dos rectas r y s, son paralelas a una tercera t, las dos primeras serán paralelas entre si

Demostración

Pues si r y s se cortaran en un punto P, desde ese punto se podrían trazar dos paralelas a la recta t lo cual está en contra del postulado de las paralelas. ■

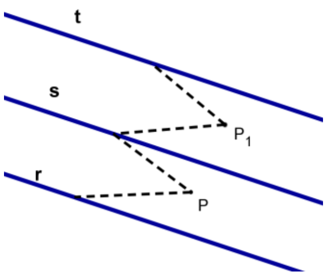


Fig. 8

Corolario 4

Si dos rectas son paralelas, toda recta perpendicular a una de ellas lo será también a la otra.

Demostración

Sean AB y CD dos paralelas y AC una perpendicular a la recta AB. Si la recta AC no fuese perpendicular a la CD, por el punto C, podríamos trazar la recta CE que fuese perpendicular a la AC; pero en este caso, las dos rectas CD y CE serían paralelas a la AB, y en virtud del postulado, por el punto C solo se puede trazar una paralela a la AB; por tanto, las dos rectas CD y CE se confundirán en una sola recta, siendo CD perpendicular a AC, y recíprocamente AC perpendicular a CD. ■

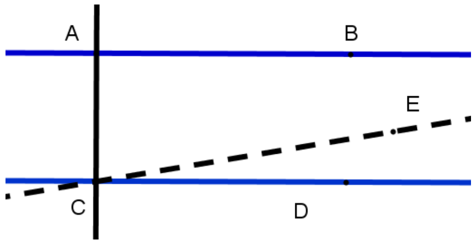


Fig. 9

Corolario 5

Si dos rectas son paralelas, sus perpendiculares respectivas también lo serán.

Demostración

Por ser MN y PQ perpendiculares respectivamente a las paralelas AB y CD, según el corolario anterior, serán perpendiculares entre ambas; por tanto, si MN y PQ no fuesen paralelas, se encontrarían en un punto, desde el cual tendríamos dos perpendiculares a una recta, lo cual es imposible. ■

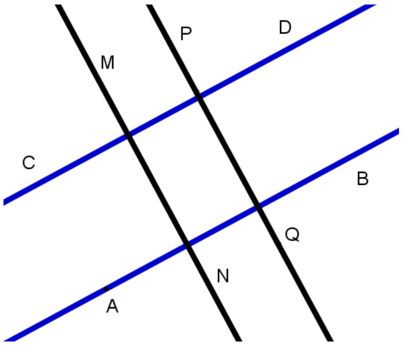


Fig. 10

Ángulos formados por una recta secante a otras dos.

Cuando una recta EF corta en puntos distintos a otras dos rectas (AB y CD) de un plano, forma con ellas ocho ángulos, cuatro con cada una de ellas.

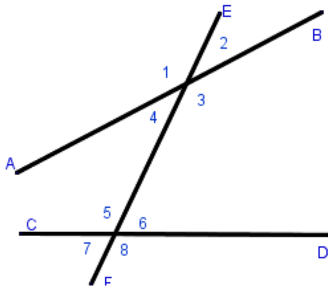


Fig. 11

Cuatro son **internos** (4, 3, 6 y 5) y cuatro **externos** (1, 2, 8 y 7).

Los cuatro ángulos formados por la recta AB y la secante, así como los otros cuatro que forma dicha secante con la recta CD, son dos a dos opuestos por el vértice o adyacentes y, por tanto, son dos a dos iguales o suplementarios.

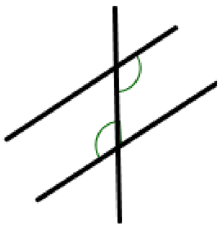


Fig. 12

Se dicen **alternos-internos** (Fig. 12), dos ángulos internos no colaterales ni adyacentes. En la figura 11 son los ángulos 3 y 5, así como los ángulos 4 y 6.

Se llaman **alternos-externos** (Fig. 13), dos ángulos externos no colaterales ni adyacentes. En la figura 11, lo son los ángulos 2 y 7, y también los ángulos 1 y 8.

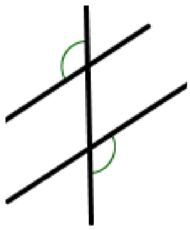


Fig. 13

Se dicen ángulos **correspondientes** (Fig. 14), dos ángulos colaterales, uno interno y otro externo, y no adyacentes. Tales son el 1 y el 5; el 4 y el 7; el 2 y el 6; y el 3 y el 8 en la figura 11.

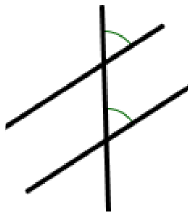


Fig. 14

Teorema

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante:

1. Los ángulos alternos–internos son iguales
2. Los ángulos alternos-externos son iguales
3. Los ángulos correspondientes son iguales
4. Los ángulos colaterales internos son suplementarios
5. Los ángulos colaterales externos son suplementarios

Demostración

Si s es perpendicular a una de las paralelas, también lo es a la otra; los ocho ángulos son rectos y en consecuencia iguales. Los ángulos colaterales serán suplementarios.

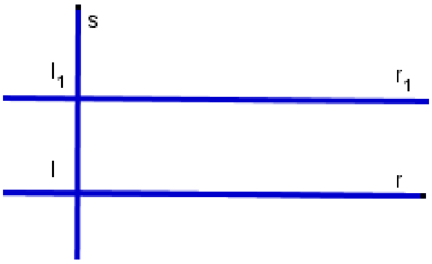


Fig. 15

Si s es oblicua sean I e I_1 los puntos de intersección con las paralelas. Por el punto medio O del segmento II_1, tracemos la perpendicular a la recta r y, por tanto, a r_1. Sean T y M los puntos de intersección.

Los triángulos rectángulos OTI y OMI_1 son iguales por tener las hipotenusas iguales ($OI=OI_1$) y un ángulo agudo igual en O, como opuestos por el vértice.

Luego $\hat{m} = \hat{n}$

Pero $\hat{m} = \hat{a}$ y $\hat{n} = \hat{u}$ por ser opuestos por el vértice.

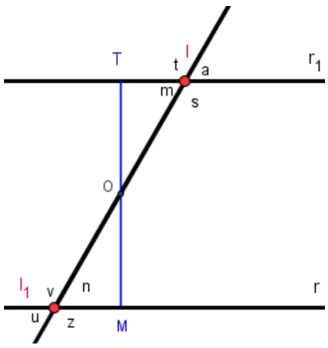


Fig. 16

En consecuencia, los ángulos obtusos $\hat{t}, \hat{s}, \hat{v}, \hat{z}$ son iguales como suplementos de ángulos iguales; $\hat{t} = \hat{s} = \hat{v} = \hat{z}$, lo que demuestra el teorema. ■

Lección 4: Polígonos

Contenido de este documento:

Polígonos. Elementos y clases
Congruencia (igualdad) de polígonos
Ángulos de un polígono convexo
Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados
Angulo exterior
Teselaciones del plano
Diagonales de un polígono
Descomposición de un polígono convexo en triángulos

Polígonos. Elementos y clases

Definición Se llama **polígono** a la porción de plano situada en el interior de una línea poligonal cerrada. Los puntos que unen los segmentos de dos en dos se llaman **vértices** del polígono, los segmentos que los unen constituyen los **lados** y el segmento que une dos vértices no consecutivos recibe el nombre de **diagonal** del polígono.

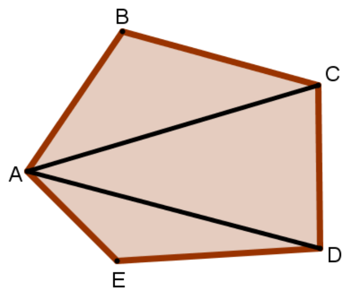


Fig. 1

En la figura 1: A, B, C, D y E son vértices.

AB, BC, CD, DE y EA son los lados.

AC y AD son dos de las diagonales.

Un polígono se llama **convexo** cuando todos sus puntos están en el mismo semiplano respecto a una cualquiera de las rectas que contienen sus lados. En caso contrario será **cóncavo**.

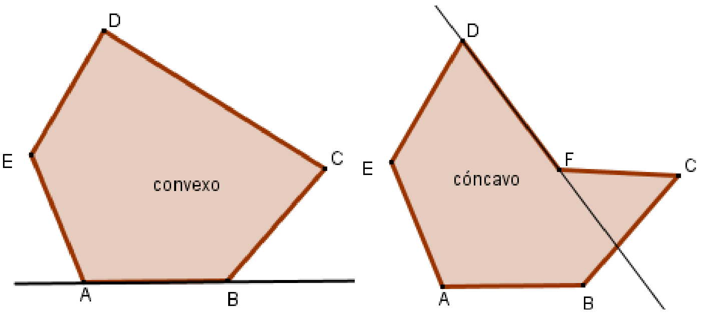
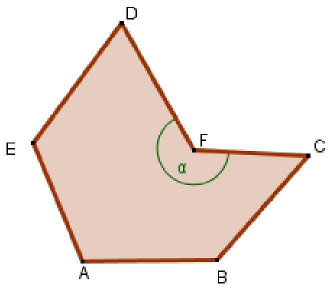


Fig. 2

Otra definición de polígono cóncavo y convexo es la que considera la medida de los ángulos interiores. Así en un polígono convexo todos los ángulos interiores son menores que un ángulo llano. Si existe algún ángulo interior mayor que un ángulo llano, el polígono es cóncavo.



Polígono Cóncavo

Atendiendo a si dados dos puntos cualesquiera del interior del polígono, el segmento que los une es siempre interior o no al polígono nos lleva a otra caracterización entre lo convexo y lo cóncavo.

El conjunto de lados de un polígono forman el contorno y la suma de sus longitudes se llama **perímetro**.

Definición Los ángulos formados por cada dos lados que concurren se llaman ángulos **internos** del polígono y sus ángulos adyacentes se llaman ángulos **externos.**

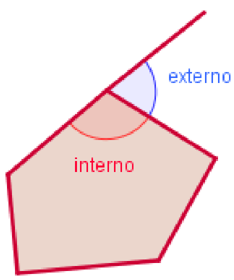


Fig. 3

Base de un polígono es uno cualquiera de sus lados.

Los polígonos se designan por el número de sus lados, así: triángulo (3 lados), cuadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), hexágono (6 lados), heptágono (7 lados), octógono (8 lados), eneágono (9 lados), decágono (10 lados), endecágono (11 lados), dodecágono (12 lados), pentadecágono (15 lados), icosígono (20 lados). Los demás polígonos no tienen nombre especial y se designan expresando el número de lados que tienen. Así, decimos polígono de veinticinco lados, de trece lados, etc.

Definición Si en un polígono todos los ángulos son iguales, el polígono se llama equiángulo y si tiene iguales los lados se llama equilátero. Si un polígono convexo es equilátero y equiángulo se dice que es **regular** y, en cualquier otro caso es irregular.

En los polígonos regulares aparecen dos nuevos elementos: el **centro** y la **apotema**. El centro de un polígono regular es el punto interior que se halla a igual distancia de sus vértices y, la apotema es el segmento perpendicular desde el centro a uno cualquiera de los lados.

También se puede decir que la apotema es el segmento determinado por el centro y el punto medio de uno de los lados del polígono regular.

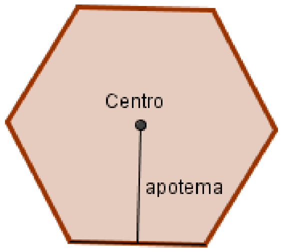


Fig. 4

Congruencia (igualdad) de Polígonos

Definición En general, podemos decir que dos figuras planas son **congruentes**, cuando se pueden superponer de manera que coincidan. Para ello, se tiene que establecer una correspondencia **biunívoca,** tal que todo segmento que una los puntos de una de ellas sea igual al que une los puntos correspondientes de la otra.

Condición para que dos polígonos convexos sean congruentes

Definición Dos polígonos convexos son congruentes si se pueden descomponer en igual número de triángulos respectivamente congruentes[3] e igualmente dispuestos.

Utilizaremos el símbolo $\equiv$ para representar la congruencia.

Sean los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' (Ver figura 5) descompuestos en los triángulos:

$$\Delta CAB \equiv \Delta C'A'B'; \ \Delta DAC \equiv \Delta D'A'C';$$

$$\Delta EAD \equiv \Delta E'A'D'; \ \ \Delta FAE \equiv \Delta F'A'E'$$

Decimos que estos polígonos son congruentes.

[3] Recordamos que la congruencia significa que las dos figuras superpuestas coinciden.

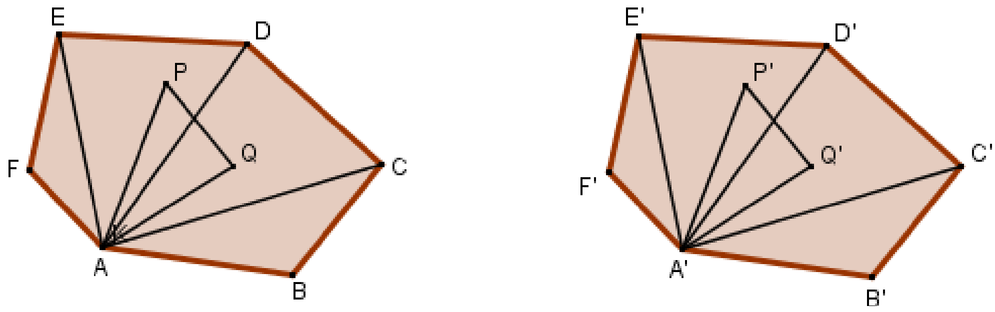


Fig. 5

Al ser congruentes, también se verificará $\Delta QAP \equiv \Delta Q'A'P'$, donde P y Q son dos puntos cualesquiera y P' y Q' los puntos correspondientes.

Ángulos de un polígono convexo

Teorema 1 La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos[4].

Demostración

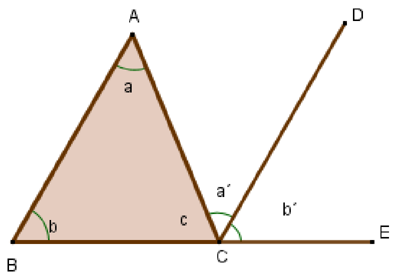


Fig. 6

Para demostrarlo dibujemos el triángulo ACB, trazando por el vértice C una paralela al lado AB y prolongando el lado BC en el sentido expresado por estas letras, tendremos que:

$\hat{a} = \widehat{a'}$ *, por alternos*

$\hat{b} = \widehat{b'}$ *, por correspondientes*

Sumando ordenadamente las dos igualdades y agregando a ambos miembros $\hat{c}$ *, tendremos:*

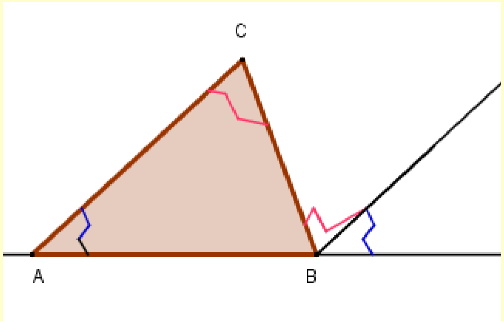
$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \widehat{a'} + \widehat{b'} + \hat{c}$$

y como $\widehat{a'} + \widehat{b'} + \hat{c}$ *es igual a dos rectos*

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2 \text{ rectos} = 180^{\circ} \quad \blacksquare$$

[4] Para facilitar la lectura designamos como $\hat{a}$ tanto al ángulo como a su medida. Ídem con cualquier otro ángulo.

También podemos visualizar esta propiedad tomando los ángulos de un triángulo cualquiera y agrupándolos alrededor de un vértice. Los ángulos “azules” son iguales por ser ángulos correspondientes y los “rojos” por alternos-internos.



Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados

Teorema 2 La suma S de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a (n-2) ángulos llanos, es decir,

$$S = 180^\circ \cdot (n-2).$$

Demostración

Sea el polígono convexo adjunto que suponemos tiene n lados.

Si trazamos las diagonales desde un vértice cualquiera, queda descompuesto en (n-2) triángulos, siendo la suma de los ángulos de todos ellos igual a la suma de los ángulos del polígono, y como los de cada triángulo suman un ángulo llano (teorema 1), los de todos los triángulos sumarán (n-2) ángulos llanos. ■

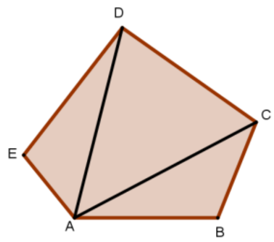


Fig. 8

Si el polígono fuese **equiángulo** el valor α de cada ángulo interior del polígono vendrá dado por:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Si el número de lados tiene límite infinito, $\frac{360^\circ}{n}$ tiende a cero y cada ángulo interior tiende hacia un ángulo llano.

La siguiente tabla muestra el valor de los ángulos internos de algunos polígonos notables

Ángulo del *triángulo equilátero*	60°
Ángulo del *cuadrado*	90°
Ángulo del *pentágono regular*	108°
Ángulo del *hexágono regular*	120°

Angulo externo

Definición Se llama **ángulo externo** de un polígono convexo, el ángulo formado por un lado y la prolongación de un lado contiguo.

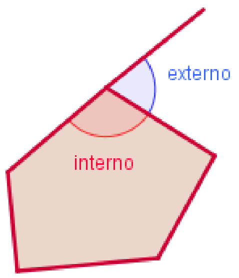


Fig. 9

Teorema 3 El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes

Demostración

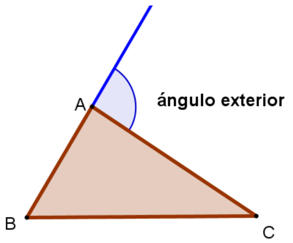


Fig. 10

Sea el triángulo ABC y consideremos el ángulo A y su ángulo exterior $(180° - A)$*.*

Tenemos que demostrar que:

Ángulo exterior a $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$.

En todo triángulo $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{A}$

$\widehat{B} + \widehat{C} =$ *ángulo exterior a* $\widehat{A}$ ■

Teorema 4 En todo polígono convexo la suma de los ángulos externos es igual a cuatro ángulos rectos ó 360°.

Demostración

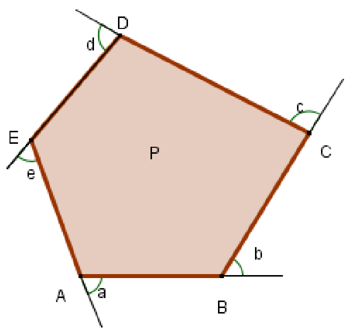


Fig. 11

Sean $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ los ángulos externos del polígono P de 5 lados.

Por definición de ángulo externo:

$$\hat{A} + \hat{a} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{b} = 180^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{c} = 180^\circ$$

$$\hat{D} + \hat{d} = 180^\circ$$

$$\hat{E} + \hat{e} = 180^\circ$$

Sumando miembro a miembro las igualdades y sustituyendo la suma de los ángulos internos por su valor, (5-2) = 3. 180°, se obtiene:

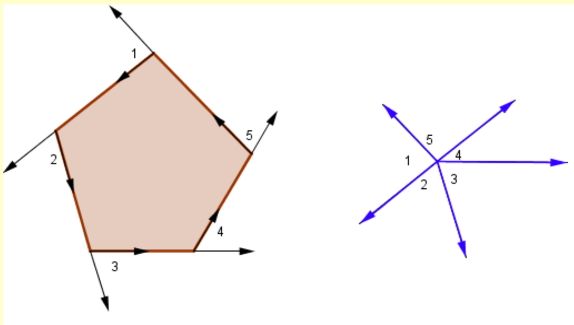
$$3.\ 180^\circ + S_{\text{ángulos externos}} = 5.\ 180^\circ$$

$$S_{\text{ángulos externos}} = 2.\ 180^\circ = 360^\circ$$

Generalizando para un polígono de n lados

$$S_{\text{ángulos externos}} = n\ 180^\circ - (n-2).\ 180^\circ = 360^\circ \quad \blacksquare$$

Otra forma visual de ver este teorema consiste en colocar todos los ángulos exteriores alrededor de un mismo punto. Obviamente, al recorrer una vuelta completa la suma es 360°.



$$m(\hat{1}) + m(\hat{2}) + m(\hat{3}) + m(\hat{4}) + m(\hat{5}) = 360^\circ$$

Teselaciones del plano

Un teselado es un conjunto de figuras geométricas dispuestas de forma que no se sobrepongan unas a otras, ni queden separaciones entre ellas. Las teselaciones se crean realizando transformaciones isométricas sobre una figura inicial. En conjunto, forman un recubrimiento del plano.

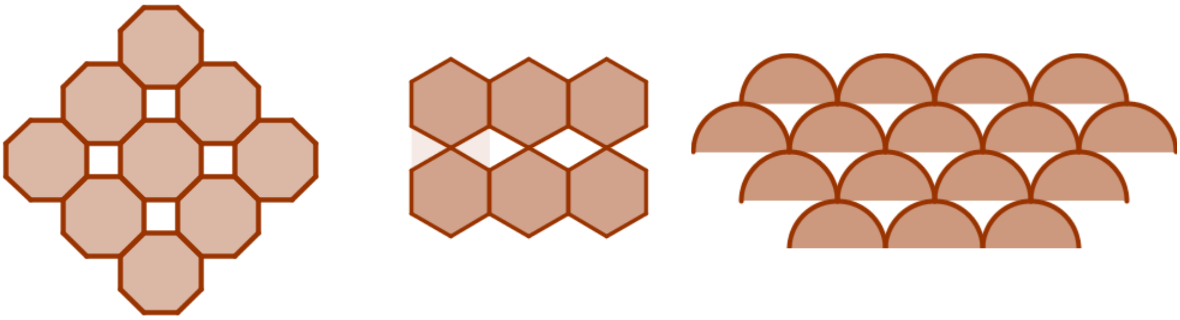


Fig. 12[5]

Veamos qué polígonos recubren el plano

Para encontrar las combinaciones de polígonos regulares que pueden acoplarse alrededor del punto P hace falta conocer las medidas de los ángulos de los vértices de los polígonos y tratar de sumar 360° en torno al mismo.

En la figura 13 colocamos alrededor del punto P un octógono regular (ángulo interior 135°), un octógono y un cuadrado (ángulo interior 90°).

$$135° + 135° + 90° = 360°$$

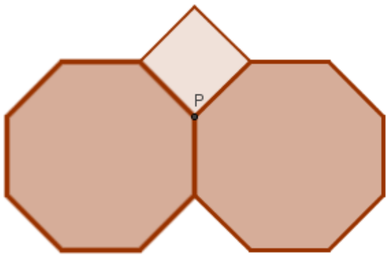


Fig. 13

Teselaciones regulares

Son las que se consiguen con un sólo tipo de polígonos regulares. Se prueba que sólo hay **tres** posibles: las formadas por hexágonos, triángulos equiláteros y cuadrados.

[5] Las zonas blancas en la figura 12 también forman parte del teselado.

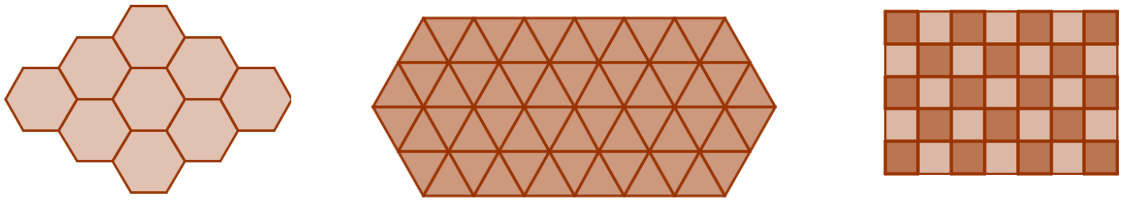
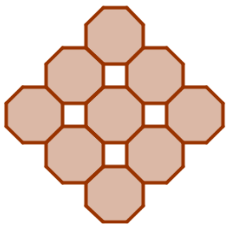
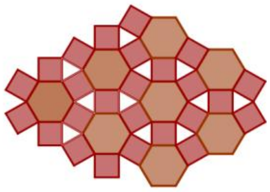
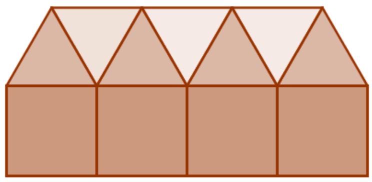
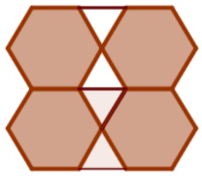


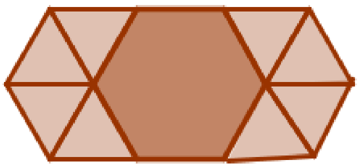
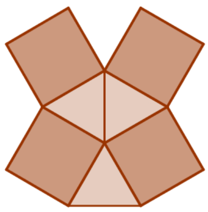
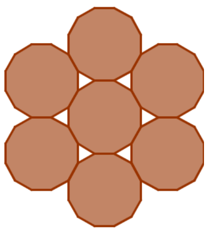
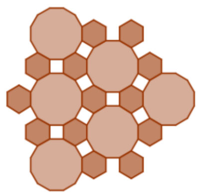
Fig. 14

Teselaciones semirregulares

Si colocamos polígonos distintos alrededor de un punto, algunas de las combinaciones posibles dan lugar a teselaciones con todos los vértices iguales. Se conocen como teselaciones semirregulares y son las **ocho** de la figura siguiente.

La teselación que tiene alrededor de cualquier vértice dos octógonos y un cuadrado la denotaremos por 884 (haciendo referencia al número de lados de los polígonos) y, así basta fijarse en un vértice de cualquier teselación para nombrarlas.

			
Tesela 884	*Tesela 3446*	*Tesela 33344*	*Tesela 6363*

			
Tesela 33336	*Tesela 33434*	*Tesela 31212*	*Tesela 4612*

Diagonales de un polígono

Teorema 5 El **número total D de diagonales** que pueden trazarse en un polígono de n lados es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Demostración

Desde un vértice cualquiera A no se pueden trazar diagonales ni a él ni a los dos vértices consecutivos B y F.

Si n es el número de vértices del polígono, de cada vértice partirán n−3 diagonales.

El número de diagonales que partirán de los n vértices será n(n−3).

Como cada diagonal une dos vértices, habrá sido trazada dos veces y, en consecuencia, el número total de diagonales será la mitad de n(n−3), es decir:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \blacksquare$$

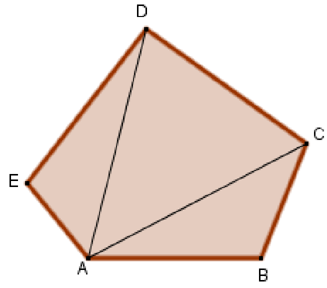


Fig. 15

Descomposición de un polígono convexo en triángulos utilizando diagonales.

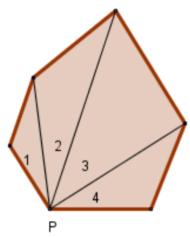


Fig. 16

Las diagonales trazadas desde un vértice descomponen un polígono dado en tantos triángulos como lados tiene menos dos.

Porque el primero y el último están formados por dos lados y una diagonal, y todos los demás, por dos diagonales y un lado.

Uniendo los vértices de un polígono con un punto P cualquiera de sus lados, queda descompuesto en tantos triángulos como lados tiene menos uno.

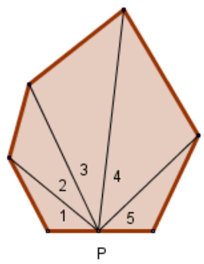


Fig. 17

Porque el primero y el último tienen cada uno un lado, una porción del otro y una secante y los demás tienen dos secantes y un lado, siendo el total de triángulos (n-1).

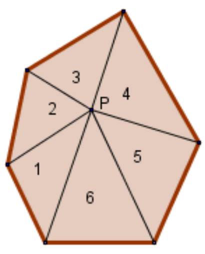


Fig. 18

Si se unen los vértices de un polígono de n lados con un punto P cualquiera interior al mismo, queda descompuesto en n triángulos.

Pues cada uno de éstos tiene un lado y dos segmentos que parten de P.

Lección 5: Triángulos

Contenido de este documento:
Triángulos. Elementos y clases
Congruencia de triángulos
Relación entre ángulos y lados
Rectas y puntos notables del triángulo

Triángulos. Elementos y clases

Definición	**Triángulo** es la porción de plano limitada por tres segmentos rectilíneos que tienen dos a dos un extremo común.

También puede decirse que triángulo es la porción de plano común a tres ángulos coplanarios que tienen dos a dos un lado común.

Para construir un triángulo se marcan tres puntos A, B y C que no estén en línea recta y se unen con los segmentos AB, BC, AC. Estos segmentos se llaman **lados** y los puntos A, B, C, **vértices** del triángulo.

El conjunto de los tres lados forman el **contorno** del triángulo y su longitud se llama **perímetro**.

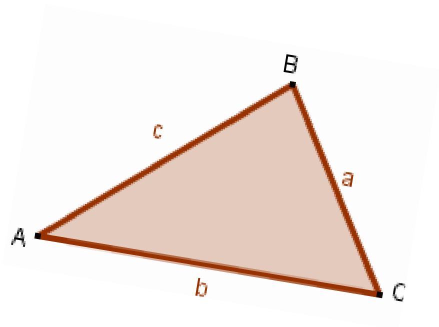


Fig. 1

En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: **interior** (formados por dos lados) y **exterior** (formado por un lado y la prolongación de otro).

Los vértices de un triángulo se designan con tres letras mayúsculas A, B, C, y los lados opuestos con las letras minúsculas a, b, c.

Se dice que un lado y un ángulo son **adyacentes** cuando el vértice del ángulo está sobre el lado. Ejemplo AC y $\hat{A}$.

Se dice que un lado y el ángulo son **opuestos** cuando el ángulo no tiene el vértice situado en ese lado. Ejemplo AC y $\hat{B}$.

Clases de triángulos.

1. **Atendiendo a sus lados**:

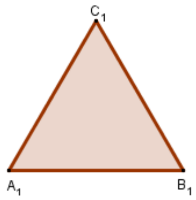
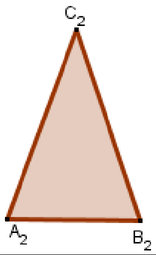
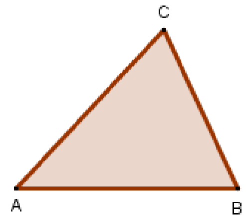
Equilátero: Tiene los tres lados iguales. Es el polígono regular de tres lados. 	**Isósceles**: Viene del griego iso, igual, y skelos, pierna. Tienen dos lados iguales y el tercero desigual. 	**Escaleno:** tiene los tres lados desiguales. Viene del griego skaleno (cojo, oblicuo) 

Fig. 2

2. **Atendiendo a sus ángulos**:

Pueden ser rectángulos, obtusángulos y acutángulos (Fig. 3)

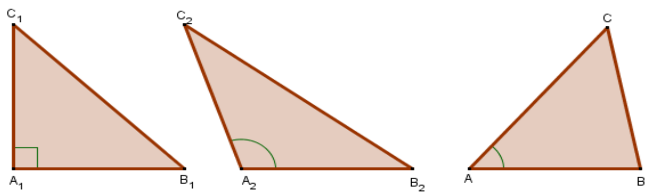


Fig. 3

Rectángulo es el que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

Obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso ($> 90°$); y **acutángulo,** si tiene los tres ángulos agudos ($< 90°$).

Congruencia de triángulos

Definición	Dos triángulos son **congruentes** si hay una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes.

ABC **congruente** a DEF $\Leftrightarrow$

A	$\leftrightarrow$	D	Correspondencia entre vértices
B	$\leftrightarrow$	E	
C	$\leftrightarrow$	F	
$\hat{A}$	$\equiv$	$\hat{D}$	congruencia entre ángulos
$\hat{B}$	$\equiv$	$\hat{E}$	
$\hat{C}$	$\equiv$	$\hat{F}$	
$\overline{AB}$	$\equiv$	$\overline{DE}$	congruencia entre lados
$\overline{BC}$	$\equiv$	$\overline{EF}$	
$\overline{AC}$	$\equiv$	$\overline{DF}$	

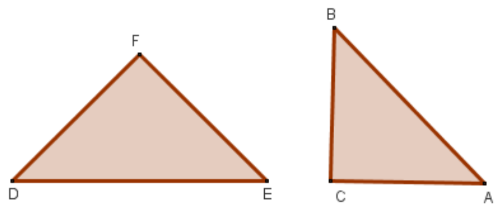


Fig. 4

Postulados LAL, ALA y LLL sobre la congruencia

Postulado LAL

Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Demostración

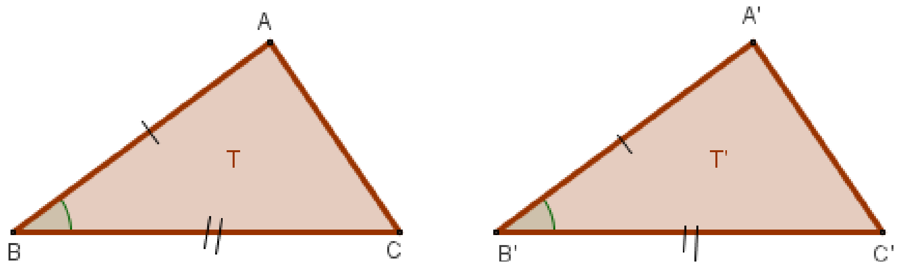


Fig. 5

Sean los triángulos T y T', donde: $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$, *AB ≡ A'B' y BC ≡ B'C'*

se verifica que:

$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

En efecto, colocando el triángulo T sobre T', de modo que coincida el lado AB con su igual A'B' y que el punto C esté en el mismo semiplano respecto al lado AB que el punto C', el lado BC coincidirá también con el lado B'C', por ser $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$ *e igual longitud de estos lados; por tanto, el lado AC, que tiene el punto A en A' y el C en C' coincidirá con A'C', y los triángulos serán congruentes.* ■

Postulado ALA

Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Demostración

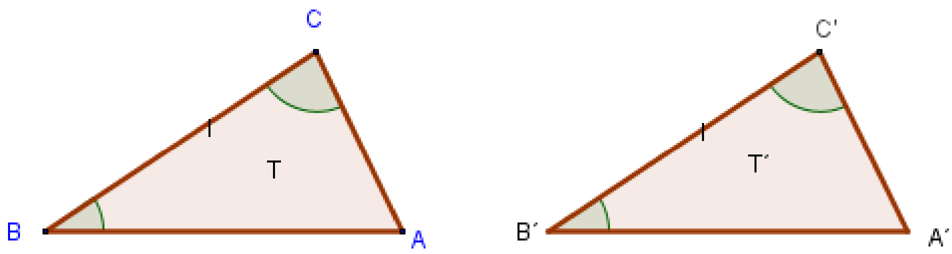


Fig. 6

BC = B′C′; $\hat{B} = \hat{B'}$; $\hat{C} = \hat{C'}$

Si colocamos el triángulo T sobre el T′, de modo que el lado BC coincida con su igual B′C′ y que el punto A esté en el mismo semiplano respecto de la recta B′C′ que el punto A′, entonces el lado CA tomará la dirección C′A′, pues $\hat{C} = \hat{C'}$ y es igual la longitud de estos lados, por tanto el lado AB que contiene el punto A en A′ y B en B′ coincidirá con A′B′ y, los dos triángulos son congruentes. ■

Postulado LLL

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Demostración

Colocando el triángulo T′ junto al triángulo T de modo que los triángulos T y T′′ estén en distinto semiplano respecto del lado común BC, y trazando la recta AA′′, tenemos que los triángulos ACA′′ y ABA′′ son isósceles, por hipótesis, de dónde:

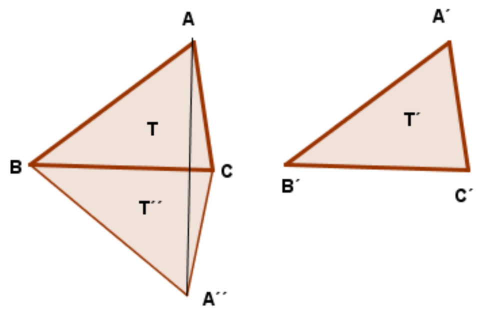


Fig. 7

$$\widehat{CA''A} = \widehat{CAA''} \qquad \widehat{BA''A} = \widehat{BAA''}$$

Luego $\widehat{CA''A} + \widehat{BA''A} = \widehat{CAA''} + \widehat{BAA''}$ *es decir* $\hat{A''} = \hat{A}$

Luego los triángulos T y T′ tienen un ángulo igual comprendido entre los lados iguales y en consecuencia son congruentes por el postulado LAL. ■

En cada uno de los criterios de congruencia expuestos en los tres postulados se puede observar que se precisan tres condiciones, y que entre los elementos congruentes haya por lo menos un lado.

Si dos triángulos son congruentes, son congruentes sus seis elementos; y a lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.

En la superposición de triángulos congruentes, los ángulos que coinciden se llaman ángulos homólogos, y también los lados que coinciden se llaman lados homólogos.

Relación entre ángulos y lados

Teorema 1 En todo triángulo, un ángulo externo es mayor que cualquiera de los internos no adyacentes.

Demostración

Sea el triángulo ABC. Demostremos primero que el ángulo externo DAC es mayor que el interno ACB. Para probarlo tracemos la recta BF que pasa por el vértice B y el punto medio E del lado opuesto AC y tomemos en ella un segmento EF = BE y unamos A con F.

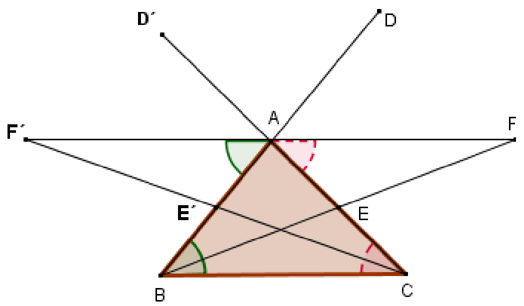


Fig. 8

1. *Con este trazado se han formado dos triángulos iguales en este orden: ΔEAF = ΔECB, pues tienen iguales los ángulos E y los lados que lo forman, por tanto,* $\widehat{ACB} = \widehat{FAC}$*; y como*

   $\widehat{FAC} < \widehat{DAC}$*, también será* $\widehat{ACB} < \widehat{DAC}$.

2. *Para demostrar que* $\widehat{ABC} < \widehat{DAC}$ *basta seguir un razonamiento análogo al anterior, y se llegará a ver que* $\widehat{F'AB} < \widehat{D'AB}$ *; y siendo* $\widehat{F'AB} = \widehat{ABC}$, $\widehat{ABC} < \widehat{D'AB}$ *; y siendo* $\widehat{D'AB} < \widehat{DAC}$ *, será también* $\widehat{ABC} < \widehat{DAC}$. ■

Teorema 2 Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos. Un lado cualquiera es mayor que la diferencia de los otros dos.

Demostración

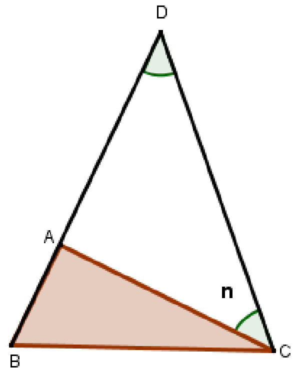


Fig. 9

El teorema es evidente tratándose de los lados menores. Basta demostrarlo para el lado mayor.

Sea el triángulo ABC y BC el lado mayor.

Decimos que: **BC < AC + AB**

En efecto, prolonguemos BA y tomemos en esta prolongación el segmento AD = AC *y unamos D con C. En el triángulo isósceles DAC se tendrá:*

$$\widehat{D} = \widehat{n} \text{ y } AD = AC$$

Pero $\widehat{n} < \widehat{BCD}$, *de donde* $\widehat{D} < \widehat{BCD}$

Y en el triángulo BCD será BC < BD, *en consecuencia*

BC< BA + AC ■

Corolario En todo triángulo un lado cualquiera es mayor que la diferencia de los otros dos.

Demostración

Este corolario es evidente tratándose del lado mayor. Basta pues, demostrarlo para los otros dos lados. Si de los dos miembros de la desigualdad BA + AC > BC restamos AC, tendremos AB > BC – AC; y si restamos BA tendremos AC > BC – BA. ■

Para poder construir un triángulo con tres segmentos rectilíneos dados, es menester que cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Estas condiciones se cumplirán si el segmento mayor es menor que la suma de los otros dos.

Rectas notables del triángulo.

Mediatriz

Definición Se llama **mediatriz** en un triángulo a la recta perpendicular a un lado cualquiera por su punto medio. En un triángulo hay tres mediatrices.

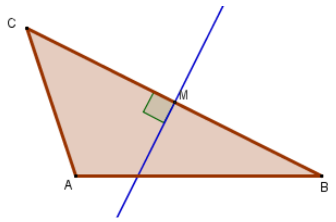


Fig. 10

Teorema 3 Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices.

Demostración

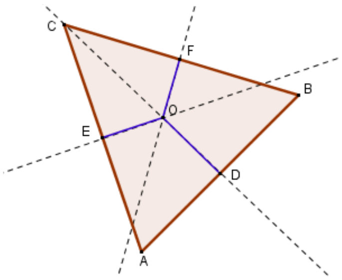


Fig. 11

Sea el triángulo ABC y OD, OE, OF las mediatrices respectivas de los lados AB, BC y AC.

Las mediatrices de los lados AB y BC se cortan necesariamente en un punto O, pues de lo contrario serían paralelas y en ese caso AB y BC lo serían también. (Ver corolario 5 del teorema 4 de la lección sobre paralelas.)

Este punto O equidista de los vértices A y B por pertenecer a la mediatriz DO, y equidista de los vértices B y C por pertenecer a la mediatriz EO. Luego O, equidistando de los vértices A y C pertenece a la mediatriz FO del lado AC y, en consecuencia las tres mediatrices concurren en un punto. El punto donde se encuentran las mediatrices se llama ***circuncentro*** *por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.* ■

Observemos en la figura 12 cómo **el circuncentro no tiene que ser interior al triángulo** y, en una de ellas cómo haciendo centro en este punto, podemos trazar la circunferencia circunscrita que pasa por los tres vértices del triángulo.

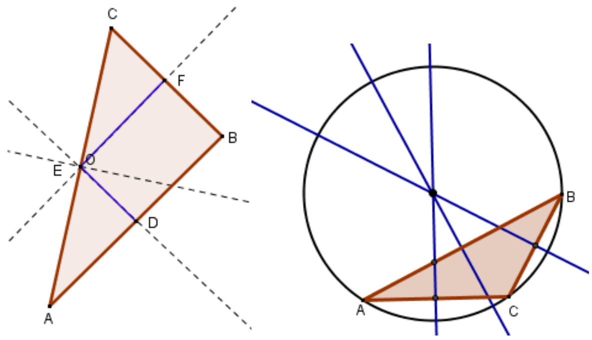


Fig. 12

Altura

Definición

Se llama **altura** al segmento que cae perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o a su prolongación.

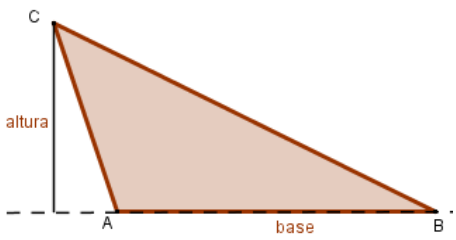


Fig. 13

Un triángulo tiene tres alturas.

Teorema 4

Las tres alturas de un triángulo o sus prolongaciones concurren en un punto único llamado **ortocentro.**

Demostración

Sea el triángulo ABC y las alturas del mismo CF, AE, BD.

Por los vértices del triángulo tracemos paralelas a los lados opuestos, con lo que quedará formado el triángulo $A_1B_1C_1$*, y los puntos medios de sus lados serán los vértices del triángulo dado.*

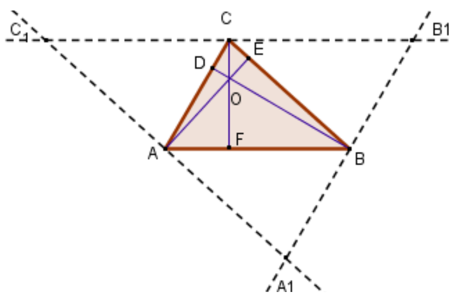


Fig. 14

Las mediatrices del triángulo que resulta serán las alturas del triángulo dado, y como estas mediatrices concurren en un punto, también concurrirán las alturas en el mismo punto, que designamos con la letra O. ■

El **ortocentro** puede ser interior o exterior al triángulo.

En la figura 15 el ortocentro del triángulo obtusángulo es exterior al mismo.

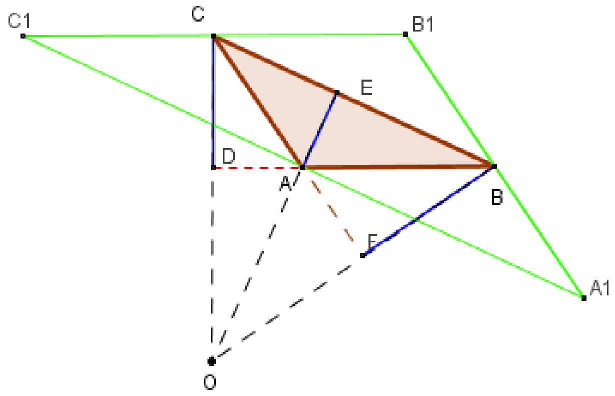


Fig. 15

Es interesante observar que en la figura 15 algunas de las alturas como CD son exteriores al triángulo. Algunos docentes no explicitan este hecho y, muchas veces, el alumnado cree que todas las alturas son siempre interiores al triángulo.

Mediana

Definición

Se llama **mediana** en un triángulo al segmento rectilíneo que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Un triángulo tiene tres medianas.

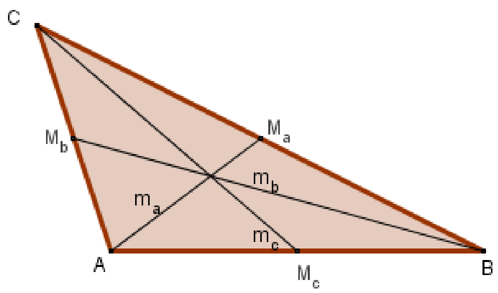


Fig. 16

En la figura 16 se observa que las tres medianas se cortan en un punto (ver teorema 6). Este punto se llama **baricentro** y es el centro de gravedad del triángulo. M_a, M_b y M_c son los puntos medios de los lados y m_a, m_b y m_c son las medianas.

Teorema 5[6]

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

[6] Este teorema se conoce como *el teorema del segmento medio*.

Demostración

Sea DE el segmento que une los puntos medios de los lados AB y AC.

Si prolongamos el segmento DE y tomamos en la prolongación un segmento EF=DE y unimos C con F se tendrá:

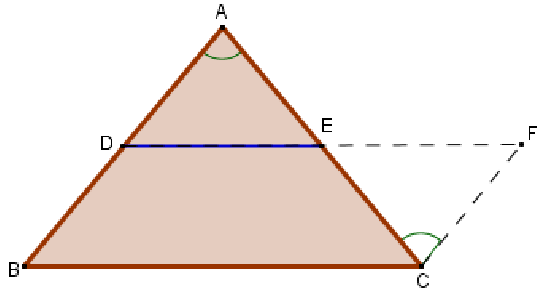


Fig. 17

ΔADE $\equiv$ ΔCFE por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido (E).

Por consiguiente $\hat{A}$ = $\widehat{ECF}$ y AD y FC serán iguales y paralelos.

Pero también AD = DB, luego FC y DB serán iguales y paralelos; en consecuencia el cuadrilátero BDFC será un paralelogramo, siendo el lado DF igual y paralelo al BC y tomando las mitades obtendremos finalmente, DE es la mitad del lado BC y paralelo al mismo. ■

Teorema 6

Las medianas de un triángulo concurren en un punto que dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

$$BG = 2 \cdot EG$$

Demostración

Sea el triángulo ABC y las medianas BE y CD. Llamemos G al punto de intersección de las dos medianas. Sean M y N los puntos medios de los segmentos BG y CG. Vamos a demostrar que:

BG=2·EG. O sea

EG = BM = MG

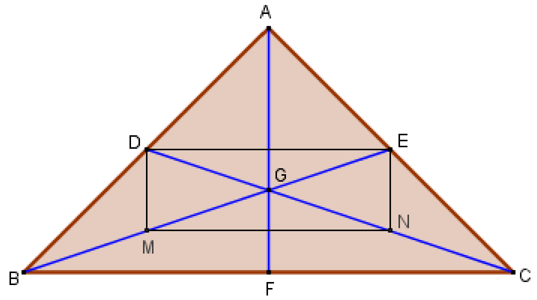


Fig. 18

El segmento DE que se obtiene al unir los puntos medios de los lados AB y AC del triángulo será paralelo al tercer lado de C e igual a la mitad de este (teorema 5).

Por el mismo motivo, el segmento MN en el triángulo BGC es paralelo al BC e igual a la mitad del mismo.

Así los dos segmentos DE y MN serán iguales y paralelos entre sí; el cuadrilátero MDEN será un paralelogramo y sus diagonales se cortarán su punto medio G, luego EG=MG y por lo tanto también BG = 2·EG.

Del propio modo la mediana BE queda dividida por la mediana AF en dos segmentos BG y GE tales que BG=2·GE. Las tres medianas concurren en un punto G situado a los $\frac{2}{3}$ de cada una de ellas a partir del vértice (Fig. 19). ■

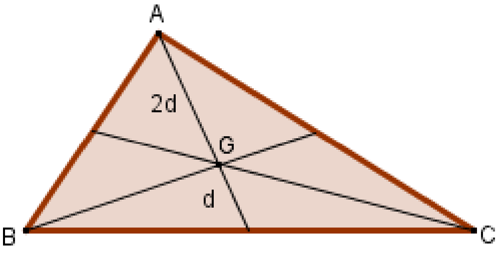


Fig. 19

Bisectriz

Definición

Se llama **bisectriz interior** en un triángulo a la semirrecta que, partiendo del vértice, divide al ángulo correspondiente en dos partes iguales. La bisectriz de los ángulos externos de un triángulo se llama **bisectriz exterior** (en la figura AD_1) y es perpendicular a la bisectriz interior (AD) del mismo vértice.

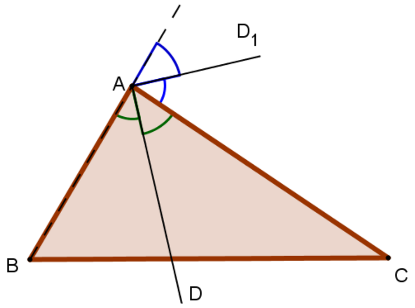


Fig. 20

Un triángulo tiene tres bisectrices interiores y tres exteriores.

Teorema 7

En todo triángulo las bisectrices de los ángulos internos se cortan en un punto interior al triángulo, y equidistante de los tres lados.

Demostración

Sea el triángulo ABC. Tracemos las bisectrices AD y BE.

$$\widehat{BAD} + \widehat{ABE} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} < \hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$$

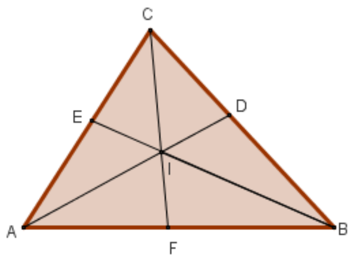


Fig. 21

las semirrectas AD y BE se cortarán en un punto interior I al triángulo ABC. Por otra parte, por pertenecer a la bisectriz AD, I equidista de los lados AB y AC, y por pertenecer a la bisectriz BE, equidista de los lados BA y BC. Equidistando de los lados CA y CB, el punto I pertenece a la bisectriz CF del ángulo C. ■

El punto I dónde se encuentran las bisectrices se llama **incentro**, por ser el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

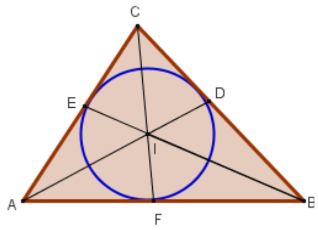


Fig. 22

Teorema 8 En todo triángulo las bisectrices de dos ángulos externos y la bisectriz del ángulo interno no adyacente se cortan en un punto exterior al triángulo.

Demostración

Sea el triángulo ABC y tracemos las bisectrices de los ángulos externos $\widehat{MBC}$ *y* $\widehat{NCB}$.

Se tendrá $\widehat{MBC} + \widehat{NCB} <$ *4 rectos*

$(\widehat{MBC} + \widehat{NCB})/2 <$ *2 rectos*

Cortándose, por tanto, sus bisectrices en un punto I_1.

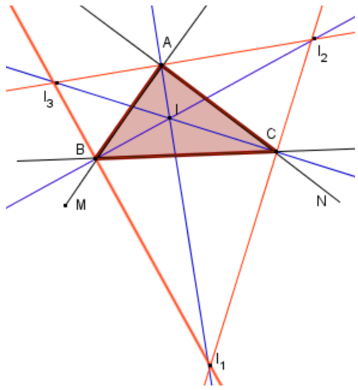


Fig. 23

Este punto equidistará de los segmentos BC y BM lo mismo que de los segmentos CB y CN, y equidistando de los lados AB y AC del ángulo $\hat{A}$, *pertenecerá a la bisectriz de dicho ángulo.*

De ahí que la bisectriz interior pasará por el punto de corte de las bisectrices exteriores. Este proceso se repite con las demás bisectrices.

■

Lección 6: Cuadriláteros

Contenido de este documento:

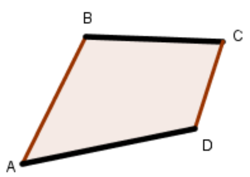
Cuadriláteros. Elementos y clases
Clasificación de los cuadriláteros convexos
Propiedades que diferencian a los paralelogramos
El teorema de los segmentos medios
El Rectángulo áureo

Cuadriláteros. Elementos y clases

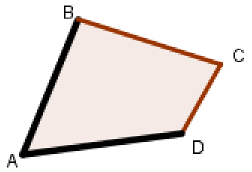
Después de los triángulos, los polígonos más sencillos, por tener menor número de lados, son los cuadriláteros.

Definición Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de los cuales no son colineales. Los segmentos se interceptan sólo en sus extremos.

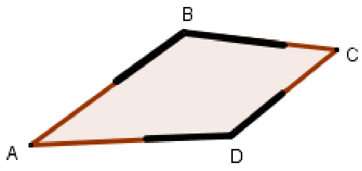
Las figuras siguientes ilustran algunos aspectos importantes de los cuadriláteros:



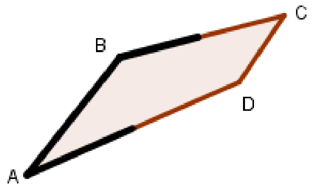
Los lados BC y AD no tienen un vértice en común. Son un par de *lados opuestos*. Los lados AB y DC también son opuestos.



Los lados AB y AD tienen un vértice en común. Son un par de *lados adyacentes*. Otros pares de lados adyacentes son AB y BC; BC y CD; AD y DC.



Los ángulos B y D no tienen un lado en común. Son un par de *ángulos opuestos*. Los ángulos A y C también son opuestos.



Los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ tienen el lado AB en común. Son un par de *ángulos adyacentes*. Otros pares de ángulos adyacentes son $\hat{B}$ y $\hat{C}$; $\hat{C}$ y $\hat{D}$; $\hat{D}$ y $\hat{A}$.

Los cuadriláteros pueden ser convexos, cóncavos y cruzados.

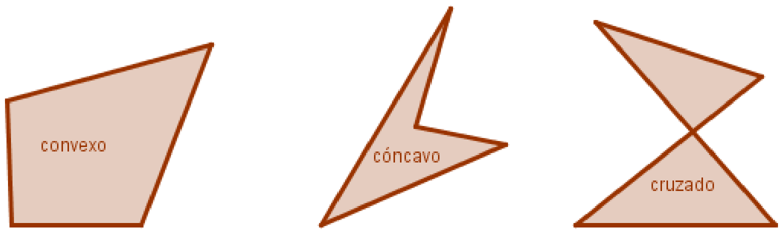


Fig. 1

Clasificación de los cuadriláteros convexos

Para clasificar los cuadriláteros hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá de variables como:

- Paralelismo de lados
- Congruencia de lados
- Congruencia de ángulos
- Número de ángulos rectos
- Posición relativa de diagonales

Atendiendo al paralelismo de sus lados, pueden ser:

- Trapezoides
- Trapecios
- Paralelogramos

Definición **Trapezoide** es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos. Cuando una de sus diagonales es mediatriz de la otra se llama simétrico o isósceles.

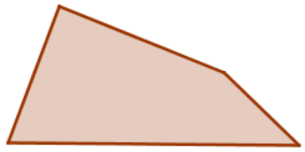


Fig. 2

Entre los trapezoides se encuentran algunos cuadriláteros singulares:

Las cometas oblicuas que tienen un par de lados consecutivos iguales

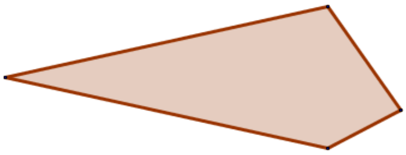


Fig. 3

Cometas, los que tienen los dos pares de lados *consecutivos* iguales:

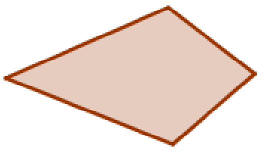


Fig. 4

Las **cometas rectangulares** que son cometas con uno, dos o tres ángulos rectos.

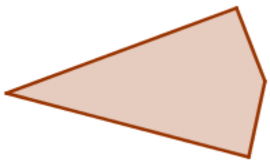


Fig. 5

TRAPECIO es el cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos. Los dos lados paralelos se llaman bases, y la distancia entre las bases, altura.

Puede ser:

Fig. 6

- **Rectángulo** si tiene dos ángulos rectos,

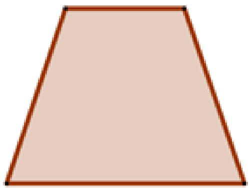


Fig. 7

- **Isósceles** si los dos lados no paralelos son iguales.
- **Escaleno** en los demás casos.

PARALELOGRAMO es el cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, comprenden el romboide, rectángulo, rombo y cuadrado.

El **romboide** tiene los lados adyacentes desiguales y los ángulos oblicuos. No es equilátero ni equiángulo.

Fig. 8

El **rectángulo,** es el paralelogramo con cuatro ángulos rectos. Es equiángulo pero no siempre equilátero.

Fig. 9

El **rombo**[7] es el paralelogramo con cuatro lados congruentes. Es equilátero pero no siempre equiángulo.

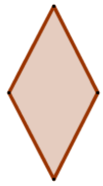


Fig. 10

El **cuadrado** es equiángulo y equilátero. Es el polígono regular de cuatro lados.

Fig. 11

La figura 12 representa una clasificación de todos los cuadriláteros mencionados.

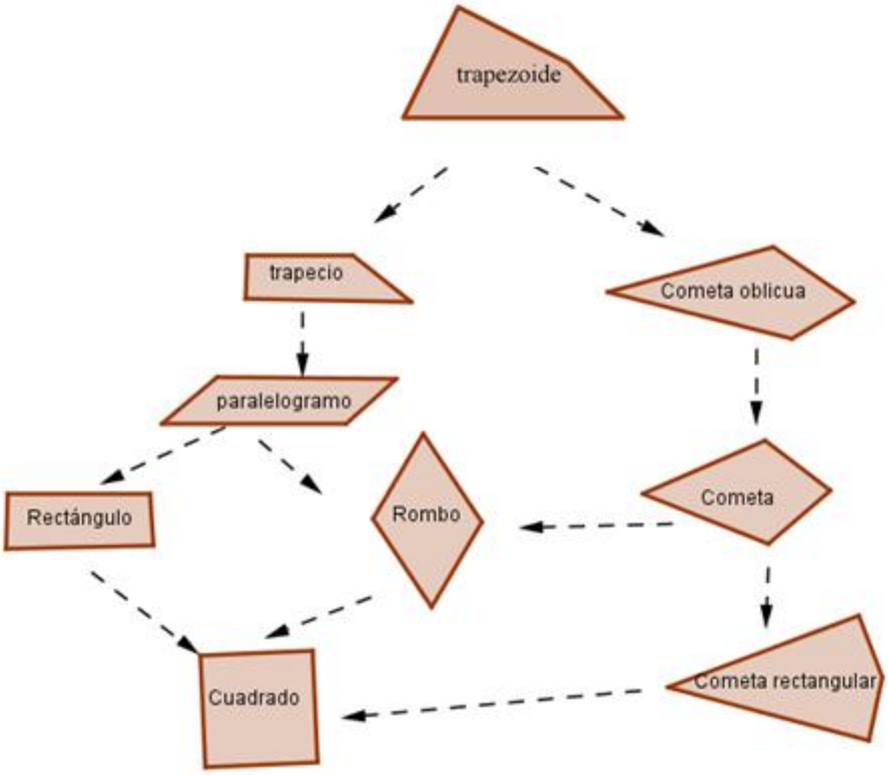


Fig. 12

[7] Entre los rombos que se pueden observar en el mundo que nos rodea, se encuentra el **rombo lagunero**, presente en la arquitectura de La Laguna, y que debe su nombre al profesor Luis Balbuena. Se caracteriza porque la razón entre sus diagonales es dos.

Algunas propiedades que diferencian a los paralelogramos

- Las diagonales del romboide son desiguales y oblicuas.

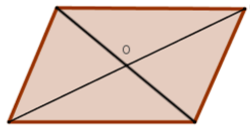


Fig. 13

- Las diagonales del rombo son desiguales, perpendiculares y bisectrices de los ángulos.

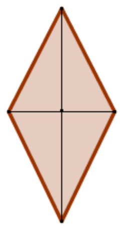


Fig. 14

- Las diagonales del rectángulo son iguales y oblicuas.

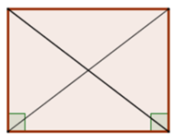


Fig. 15

- Las diagonales del cuadrado son iguales, perpendiculares y bisectrices de los ángulos.

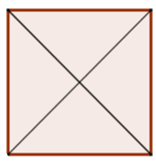


Fig. 16

El teorema de los segmentos medios

Teorema 1 Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera son los vértices de un paralelogramo.

Demostración

Dibujemos el cuadrilátero ABCD y señalemos los puntos medios de los lados X, Y, Z y W.

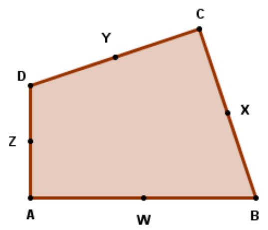


Fig. 17

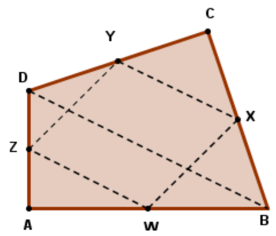


Fig. 18

Construimos los segmentos auxiliares DB, ZW, YX, ZY y WX.

Aplicando el teorema del segmento medio[8] *a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ resulta que WXYZ es un paralelogramo.* ■

El rectángulo áureo

Definición El **rectángulo áureo** es un rectángulo tal que si se corta un cuadrado en uno de los extremos, los lados del rectángulo resultante estarán en la misma proporción que los del rectángulo original.

Dado que las proporciones entre pares de lados correspondientes al rectángulo grande y al pequeño (ABCD y EBCF) son iguales, para calcular la longitud del lado más largo del rectángulo áureo de anchura uno podemos utilizar la siguiente proporción

$$\frac{1+a}{1}=\frac{1}{a}$$

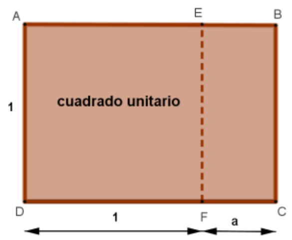


Fig. 19

Donde por conveniencia hemos tomado AD igual a uno:

Resolviendo la ecuación de 2º grado, $a^2+a-1=0$, obtenemos como longitud del lado DC= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

El número, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es conocido como número áureo o de oro, y por estar presente hablamos de "rectángulo áureo".

[8] Demostrado en la lección de triángulos (teorema 5).

Construcción de un rectángulo áureo

Con un compás y una regla, sigamos las siguientes instrucciones:

- Construimos un cuadrado ABCD.
- Encontramos el punto medio M del lado AD. Con M como centro y MC como radio, dibujamos un arco que intercepte a AD en E.
- Construimos EF ⊥ AE y completamos el rectángulo áureo ABFE.

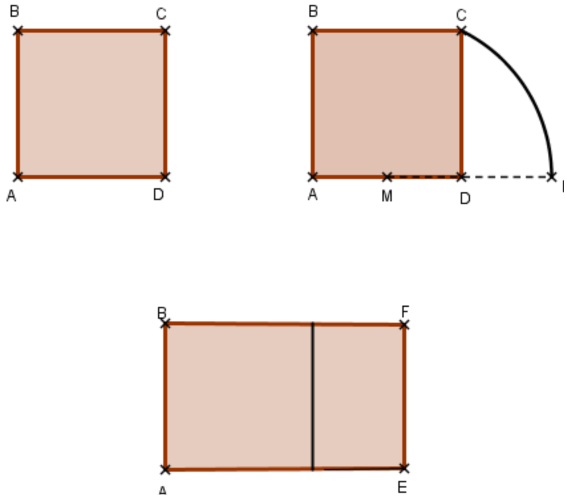


Fig. 20

Lección 7: Perímetros y áreas

<u>Contenido de este documento:</u>
Ideas generales
Equivalencia de polígonos
Cálculo de áreas de polígonos

Ideas generales

Se llama **superficie** a la parte del plano limitada por líneas. La **medida** de una superficie utilizando una unidad prefijada, se llama **área** de la superficie. Por tanto, el área de una superficie es un número positivo.

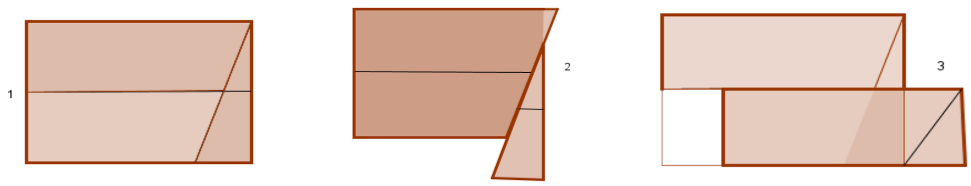


Fig. 1

En la figura 1: 1, 2 y 3 son superficies distintas, tienen la misma área si las medimos con la misma unidad. Son figuras **equivalentes**.

Una **región poligonal** es un subconjunto de un plano acotado por un polígono. A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado **área**.

Las propiedades de las áreas se describen en varios postulados:

i. **Área de regiones congruentes**: Si dos polígonos son congruentes, las regiones que acotan tienen la misma área.

ii. **Suma de áreas:** Si una región poligonal es la unión de **n** regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las **n** regiones. Veamos un ejemplo:

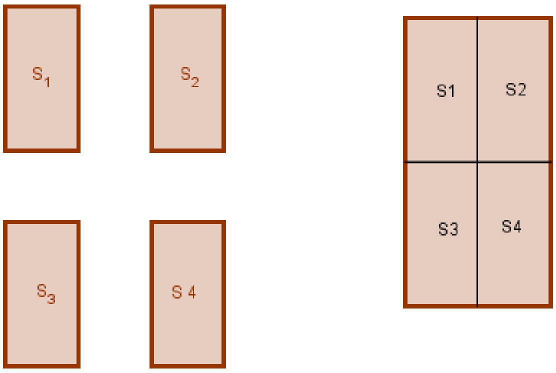


Fig. 2

En la figura 2, la suma del área de las cuatro piezas es igual al área de la figura formada por la unión de las cuatro piezas.

Equivalencia de polígonos

Se dice que dos polígonos son equivalentes cuando ocupan la misma superficie y por ello tienen la misma área.

Algunos ejemplos

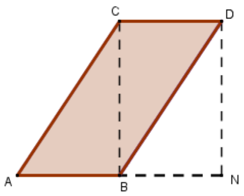


Fig. 3

Todo paralelogramo ABDC es equivalente a un rectángulo que tenga igual base e igual altura BNDC.

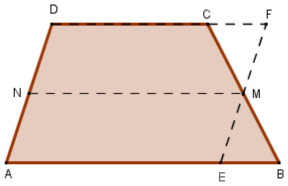


Fig. 4

Todo trapecio ABCD es equivalente a un paralelogramo que tenga por base la paralela media y por altura la misma que el trapecio.

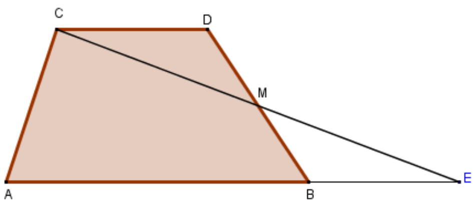


Fig. 5

Todo trapecio ABDC es equivalente a un triángulo que tenga por base la suma de las bases del trapecio y por altura la misma que el trapecio.

Todo triángulo es equivalente a:

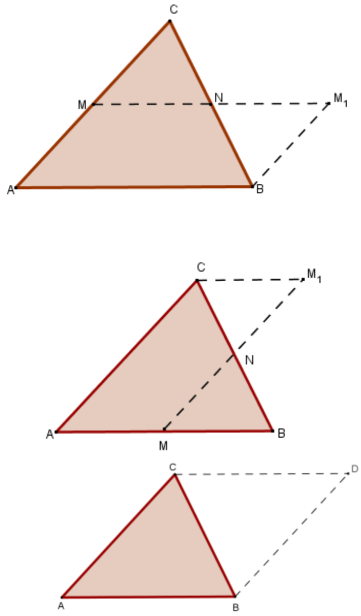


Fig. 6

i. *un paralelogramo de igual base y mitad de altura.*

ii. *a un paralelogramo de igual altura y mitad de base*

iii. *a la mitad de un paralelogramo de igual base e igual altura*.

Cálculo de áreas de polígonos.

El cálculo de las áreas de los polígonos se basa en el área de un rectángulo.

- **El área de un rectángulo es igual al producto de la medida de la base por la medida de su altura.**

Área = b · a

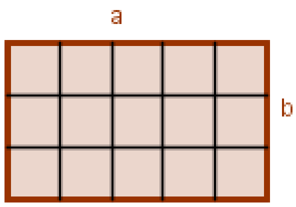


Fig. 7

- **El área del cuadrado será el lado elevado al cuadrado ya que es un rectángulo de dimensiones iguales.**

Áreas de paralelogramos, trapecios, trapezoides y triángulos

- **El área del rombo ABCD es igual al semiproducto de las diagonales BD y AC**.

  En efecto, si por los vértices del rombo ABCD trazamos paralelas a las diagonales obtenemos el rectángulo EFGH cuya área es el doble de la del rombo ya que, como se puede observar, los ocho triángulos rectángulos que aparecen en la figura son iguales, por tener los catetos iguales, 4 de ellos equivalen al rombo y 8 forman el rectángulo.

  Luego el área del rombo es $\frac{1}{2}$ área del rectángulo e igual al semiproducto de sus diagonales (BD congruente con la altura FG del rectángulo y AC con la base HG del mismo).

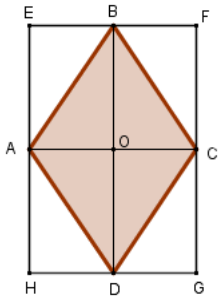


Fig. 8

- **El área de un paralelogramo es igual al producto de la medida de su base por la medida de su altura.** Ya que es equivalente a un rectángulo que tenga la misma base e igual altura que él.

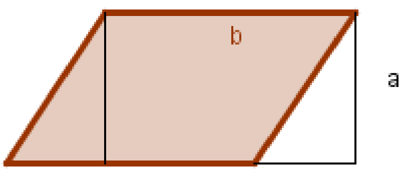


Fig. 9

Al suprimir un triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones a y b. Por tanto A = b·a

- **El área del trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura**.

  Si a un trapecio le adosamos otro igual en posición invertida, se obtiene un paralelogramo de base b + b_1 y altura a.

$$A = \frac{b + b_1}{2} \cdot a$$

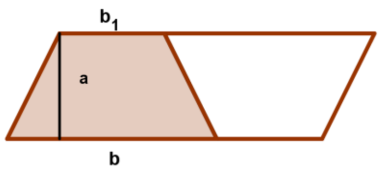


Fig. 10

- **El área del trapezoide ABCD es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales AC y BD.** [9]

Como se observa en la figura el área del trapezoide ABCD es la mitad del área del rectángulo EHGF, donde la base y la altura del mismo coinciden con las diagonales del trapezoide.

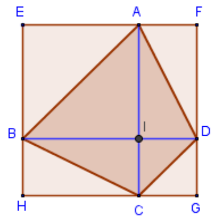


Fig. 11

- **El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.**

Tenemos un triángulo de base b y altura a. le adosamos otro igual en posición invertida y se obtiene un paralelogramo. Por tanto:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{A_{\text{paralelogramo}}}{2} = \frac{b.a}{2}$$

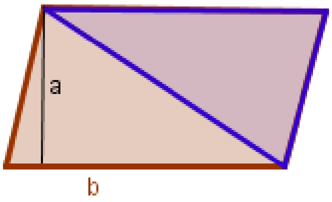
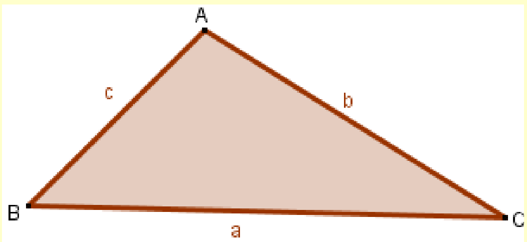


Fig. 12

En ocasiones, puede suceder que se conozcan los tres lados de un triángulo pero no su altura. En tales casos es útil la fórmula utilizada por ***Herón de Alejandría*** *en el siglo I de nuestra era.*

Si el triángulo ABC tiene lados de longitudes a, b y c entonces su área es:



$A = \sqrt{s\ (s-a)(s-b)(s-c)}$, *donde s= ½ (a +b +c)*

[9] ¿Puede el lector averiguar si esta fórmula se verifica para cualquier trapezoide?

Área de un polígono regular

Recordemos las definiciones:

1. Se llama **perímetro** de un polígono a la suma de las longitudes de sus lados.
2. Se llama **apotema** de un polígono regular a la distancia de su centro a un lado.

Veamos el cálculo del área de un hexágono regular.

Descompongamos el hexágono en triángulos congruentes, cortemos estos triángulos y calculemos el área del hexágono como la suma del área de los triángulos.

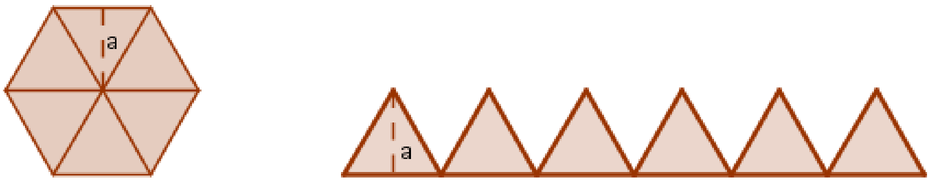


Fig. 13

Observemos que la apotema coincide con la altura del triángulo. El lado del hexágono, l, coincide con la base de cada triángulo. Entonces:

$$A_{\text{hexágono}} = 6\,\frac{l.a}{2} = \frac{perimetro\ \ por\ apotema}{2}$$

El área de un hexágono regular es igual a su perímetro por la apotema dividido entre dos. La generalización para un polígono regular de n lados es inmediata.

Área de un polígono cualquiera. Procedimiento primero

Para hallar el área de un polígono cualquiera se descompone en triángulos y se suman las áreas de todos ellos.

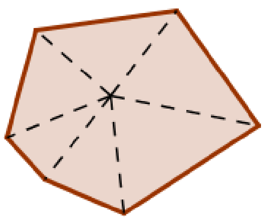
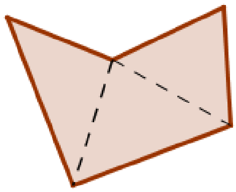


Fig. 14



Si el polígono dado fuese cóncavo (Fig. 15), se descompone en polígonos convexos y después se hallan las áreas.

Fig. 15

Área de un polígono cualquiera. Procedimiento segundo

También puede hallarse el área de un polígono convexo trazando una diagonal AE (Fig. 16) y desde los vértices que no están situados en esta diagonal se trazan perpendiculares para descomponer el polígono en trapecios y triángulos rectángulos.

Tendremos todos los datos necesarios para calcular las áreas parciales, las que una vez sumadas nos darán el área del polígono.

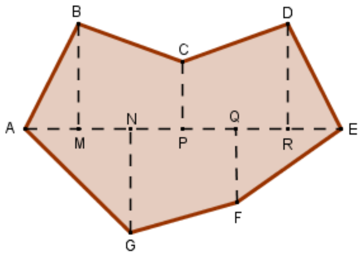


Fig. 16

Área de un polígono cualquiera. Procedimiento tercero

Pudiera ocurrir que no se pudiesen tomar directamente las medidas en el polígono (como podría ser en el caso de un estanque, una laguna, un bosque cercado, etc.). En estos casos se circunscribe un rectángulo cuya área se puede calcular fácilmente y, desde los vértices del polígono no situados en el rectángulo se trazan perpendiculares a los lados de éste y se halla el área de los triángulos y trapecios exteriores. La diferencia entre el área del rectángulo y la suma de áreas de las figuras externas nos da el área buscada.

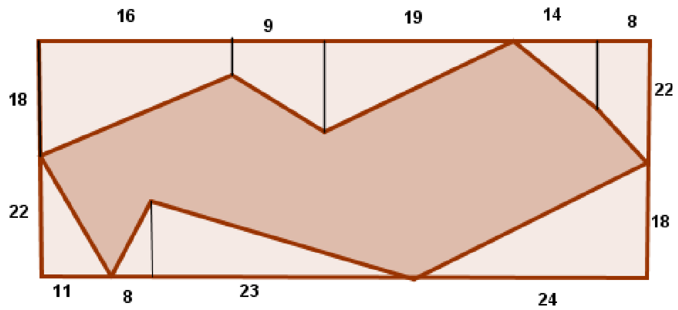


Fig. 17

Fórmula de PICK

Se utiliza para calcular el área de grandes superficies con formas irregulares. Para ello, se toma una foto aérea de la superficie y se aproxima la misma con un polígono. Se coloca encima una retícula y se cuenta el número de puntos que hay en el borde de la retícula (B) y el número de puntos que hay en el interior (I).

Si tomamos como unidad el cuadrado de lado 1, la fórmula de Pick nos da el área del polígono como:

$$\text{Área} = I + B/2 - 1$$

Para calcular el área de la superficie original habrá que tener en cuenta la escala utilizada.

En la figura 18 hemos aplicado la fórmula de Pick para calcular el área del polígono cóncavo sombreado. Si contamos los puntos I y B y aplicamos la fórmula, se obtiene:

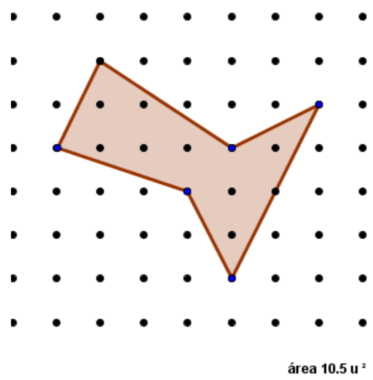


Fig. 18

$I = 8$
$B = 7$
$\text{Área} = 8 + 7/2 - 1 = 10{,}5\ u^2$

En http://www.unizar.es/ttm/2006-07/Pick.pdf se puede encontrar la demostración y más información sobre la fórmula de PICK.

Pulsa aquí para ver más